SPT 高等院校选用教材

理工类

数学基础

中国科学技术大学
汪芳庭　编著

科学出版社

高等院校选用教材(理工类)

数 学 基 础

中国科学技术大学

汪芳庭 编著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书全面介绍数学基础的历史，阐述现代数学主体的基础——ZFC 集论，重点讲述四种数（自然数、实数、序数和基数）的理论．书中采用一种特殊的构造实数的新方法——非 Archimedes 序域法，它与传统的 Dedkind 分割和 Cantor 基本序列等方法不同，是一种有益的新的尝试．

本书适合数学系本科生、研究生作为教材，也可供理工科其他专业作为教学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

数学基础/汪芳庭编著．-北京：科学出版社，2001

（高等院校选用教材（理工类））

ISBN 7-03-009273-2

Ⅰ．数… Ⅱ．汪… Ⅲ．数学基础-高等学校-教材Ⅳ．O143

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 13749 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2001 年 7 月第一次印刷 印张：16 1/2

印数：1—3 000 字数：295 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈杨中〉）

前　言

自 1995 年秋，中国科学技术大学数学系为数学系一年级学生试开数学基础课，至今已有六届. 对这项试验课程，学生们热情很高，不断地提出宝贵的意见和建议，给了作者很大帮助. 本书是在本课程所用讲义的基础上形成的，是课程试验的总结，其中包括学习研究的心得. 感谢冯克勤、程艺、李尚志等校、系领导的大力支持，供作者有幸做了这件有意义的事情.

本书在概述数学基础的历史之后，主要介绍了现代数学主体的基础——ZFC 集论，重点讲述四种数的理论，这四种数是自然数、实数、序数与基数. 在这四种数中，自然数被放在中心位置，贯穿始终. 关于实数，书中采用特殊的非 Archimedes 序域来构造，这不同于传统的 Dedkind 分割与 Cantor 基本序列等方法，是一种有意义的尝试. 书中 * 号仅供选学.

北京师范大学数学系王世强先生长期以来给予很多支持和鼓励，在此深表谢意.

感谢张卜天同学，他认真阅读了本书部分初稿，提出了很好的改进建议，有不少已被采纳.

特别感谢科学出版社杨波编辑，由于他的热情支持，本书才迅速出版.

最后向有兴趣的读者建议：书中的练习可不必全做，但应尽量动手多做；在尚无自己的解法前，尽量先不看书后的解答；书中定理或命题的证明，最好也先自己动手试证，再看书上的证明，这样效果会更好. 读者们在学习数学知识的过程中，应注意加强对数学科学的思想和意义的理解，希望本书在这一点上也能起到一定的作用.

作　者

2000.12.16

目　　录

第一章　历史概述

数学基础是研究什么的？特别，它是否仅为应付“数学危机”而存在？我们想先通过对它的历史的简要考察来回答上述问题.

本章要点：

1．在数学基础方面，人类有过什么样的研究与成就？

2．关于数学基础，历史上出现过哪些矛盾？

3．数学基础的理论成就意义何在？

§ 1.1　欧几里得几何

人类古代数学经历了漫长的积累过程. 在巴比伦与古埃及数学的基础之上，公元前6世纪起，出现了灿烂的古希腊数学，其前期的精华积淀浓缩在公元前3世纪的光辉著作——欧几里得的《几何原本》之中. 该著作一问世，古希腊其他前期数学著作几乎被逐渐废弃.

《几何原本》这部巨著“雄视数学界两千余年，其主要内容几乎原封不动地保留在现代的中等数学教育中”[1]，至今已出现过一千多种版本. 它对数学、一般科学及科学思想所产生的巨大影响是其他数学著作难以比拟的.

1.1.1　《几何原本》的学术背景

欧几里得(Euclid，约公元前330～前275)是亚历山大大学数学教师. 对他本人，公元3世纪末的古希腊数学家帕普斯(Pappus)留下的赞许是：“谦虚谨慎和关怀他人”[2]. 此外，生平不详.

从公元前6世纪至欧几里得时代，古希腊的经济、政治、文化、历史及地理环境等社会条件造就了一大批著名学者与思想巨人，为了理解《几何原本》的渊源及意义，现按历史顺序列出其中有关的最重要的几位，他们是众多学派中最著名学派的首领.

(1) *泰勒斯*(Thales，约公元前624～前547)

他曾在埃及、巴比伦从事商业与学术活动，后回到米利都创立了他的学派. 他被称为古希腊第一位哲学家，在数学、天文学、气象学等方面皆有贡献. 他还被称为“希腊几何学的先驱”[3].

(2) 毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前 580～前 500)

曾游学埃及、巴比伦等地,后回家乡办学,建立学派. 该学派证明了勾股定理,发现了不可通约线段存在(因而发现了无理数),并被称为数论的先驱. 他们还运用数学来研究天文与乐律. 与古代传统一致,在他们那里,算术与代数的研究以几何形式进行. 该学派的哲学思想以“数”为中心,认为整数是万物的起因(常被简称“万物皆数”).

(3) 柏拉图(Plato,公元前 427～前 347)

曾拜哲学家苏格拉底(Socrates,公元前 469～前 399)为师. 他所创立的学园是公元前 4 世纪古希腊的思想中心,是毕达哥拉斯学派与欧几里得学派联系的纽带. 他建立了以理念论为核心的哲学体系,形成一种数学化哲学,对后世影响很大. 他十分重视教育,在学园内培养了大批著名学者,包括一些百科全书式的人物,其中最有名的一位是亚里士多德(见下面(5)). 该学派数学上的成就大多融入《几何原本》.

(4) 欧多克斯(Eudotus,约公元前 400～前 347)

曾向毕达哥拉斯学派学习,也曾就读于柏拉图学园,后在学园任教. 他与学园其他数学家修迪乌斯(Theudius)等的著作是《几何原本》的直接先驱. 他的天文学成果被后世托勒玫(Ptolemy,约 90～168)继承. 他建立了关于比例的理论,提出了计算面积等几何量的穷竭法.

(5) 亚里士多德(Aristotle,公元前 384～前 322)

柏拉图的学生,在柏拉图学园学习和从事学术活动 20 余年. 柏拉图曾称赞他是“学园精英”. 他被称为“古代最大的思想家”[4],古希腊哲学家中“最博学的人物”[5]. 他总结以往科学与哲学成就,历史上第一次全面系统地研究了逻辑,是形式逻辑(即传统逻辑)的奠基人. 他的业绩在量上和质上都压倒先人,其逻辑著作雄视逻辑界约 2000 年. 他对欧几里得有重要影响,这种影响主要是逻辑上的(只有少量属于他的定理进入《几何原本》). 从他所建立的演绎法体系可清晰看见《几何原本》的逻辑背景.

以上可以看出,古希腊学者对数学的思考是与对自然科学、逻辑学和哲学等的思考紧密结合在一起的,这一点可以帮助我们理解古希腊人何以能在那样长的历史时期内始终站在世界科学发展的最前列.

就在亚里士多德离开历史舞台的前后,欧几里得登上了该舞台的同一点. 可以说,《几何原本》不是欧几里得孤立一人的成就,而是时代的产物. 从逻辑上看,《几何原本》事实上是亚里士多德逻辑演绎体系的几何表现;从数学上看,《几何原本》是欧几里得对古希腊前期为数众多的数学著作极其成就的系统编纂(当然也包含他本人的重大贡献).

一句话,《几何原本》是含有欧几里得本人智慧在内的时代智慧的结晶.

1.1.2 几何学——古希腊数学的主体

毕达哥拉斯学派发现,正方形对角线与一边之比($\sqrt{2}$)不是整数对整数之比,即:对角线与一边是不可通约(或不可公度)的.(反设$\sqrt{2}=p/q$,其中 p 与 q 是两个无公因子整数,而由 $p^2=2q^2$ 即可推出 2 是 p 与 q 的公因子.)这一事实的发现本是该学派的最大成就之一,但反倒让他们感到震惊,因为违背了该学派万物皆依赖于整数的信条. 据说发现这一事实的希帕苏斯(Hippasus)被他们扔进海里(另一说法是希帕苏斯因泄密而受严惩). 他们是不愿意放弃"万物皆数"信条的. 对此,莫绍揆先生曾有一段很恰当的描述:

"任何量,在任何精确度的范围内都可以表示成有理数,这不但在希腊时代是人们普遍接受的信条,就是在测量技术已经高度发达,可以测量高度精密的今天,这个断言,似乎也是毫无例外的正确! 可是居然发现了不可公度的两个线段;……这该是多么违反常识的事,表面看来,也是多么荒谬的事. 要把这种'荒谬'的事承认下来是多么困难呵! 它简直把以前所知道的事情根本推翻了."[6]

正整数是人类最先得到的抽象数学概念,其现实原型无处不在. 除此之外,数学中再难有更简单且更重要的基本概念了. 古代,人们产生对整数的崇拜,是很自然的.

很长一段时期内,"万物皆数"信条所遇见的上述危机(常被叫做"第一次数学危机")成了希腊学者关注的焦点. 柏拉图在他的著作中提出问题,"呼吁关于不可公度数的知识"[7].

欧多克斯用几何方法来解决这一难题. 首先,把数的概念与量的概念分开,不谈无理数,可以谈线段长度(或面积、体积等量)之比. 他建立了精巧的关于量的比例理论,这一理论在《几何原本》第五卷中得到阐述. 与其说欧多克斯解决了问题,不如说他回避了问题:用"量的比"来回避无理数.

没有无理数,怎样解形如 $x^2-2=0$ 这样的方程? 古希腊人从几何上考虑,把方程的解看作是一线段的长度. 这样,几何地"解方程"变得可以进行. 当然,方程本身也要几何化. 古希腊数学于是形成了一大特点:算术与代数长期依附于几何. 数学量常依其几何意义来命名(如说"平方"、"立方"而不说"二次方"、"三次方"),数学结论常用几何方式来表述(如恒等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 被表示成几何图形:边长为 $a+b$ 的正方形被剖分成四块——边长分别为 a 和 b 的两个正方形及两个以 a, b 为邻边的矩形). 人们渐渐形成了一种习惯认识:只有几何才严格;即使从算术上或代数上得到一个结论,也

总想去另找一个几何证明.

几何长期占统治地位与几何本身特点有关. 几何中,图形直观便于想象,概念清晰易于定义,结论明确使人相信. 几何学自然变成了逻辑首先占领的地盘. 相比之下,数系理论的建立要复杂得多. 任何一种严密的数系理论的建立,都基于对无限及无限过程的深入认识,这在古希腊是无法达到的. 受历史条件的限制,他们无法给数的知识建立起类似于几何的理论,尽管当时他们已经知道了大量关于数的经验事实.

就这样,古希腊对数学的理论思维从数转向形,从算术、代数转向几何. 几何学成了数学的主体. 几何基础便成了当时数学的基础. 当时人们对"数学危机"的思考与回答在很大程度上决定了《几何原本》的最终形式,但远不是形成《几何原本》的惟一动因.

从较窄的意义理解,数学基础的任务是:研究数学的主体是在哪些基本概念与基本事实之上用何种方式建立起来的. 从这个意义上理解,欧几里得的《几何原本》是人类第一部数学基础的理论著作.

1.1.3　演绎证明的范本

从现代观点看,《几何原本》逻辑上的漏洞很多,历史上也曾不断有人指出它的不足. 但这并未影响它的历史功绩,并未妨碍人们长期把它当作演绎证明的范本. 欧几里得本人除了《几何原本》,还另有至少八部专著. 有的已经失传(如《二次曲线》、《曲面轨迹》等),有的虽已流传至今(如《数据》、《论剖分》等),但并未被人重视. 显然,欧几里得掌握的数学知识比他选入《几何原本》中的要多得多. 面对浩瀚的原始数学资料,他精心选择,并对所选材料作了高明的编排.《几何原本》所包含的丰富内容固然重要,但更重要的不是这些材料本身,而是由这些材料有机结合而成的著作在整体结构上所具有的生命力. 作为一本数学基础书,《几何原本》呈现在人们面前的不是事实的简单堆砌,而是一幅逻辑演绎体系的精彩画卷.

《几何原本》第一卷是这样开始的:对点、线、面、直线与平面等基本概念作了描述性定义(如"点是没有部分的","线是没有宽度的"等),继而定义了角、圆、平行线等一批概念. 作为推理的出发点,欧几里得列出了如下公理与公设[8].

公理 1. 等于同量的量相等.

公理 2. 等量加等量,其和相等.

公理 3. 等量减等量,其差相等.

公理 4. 互相重合的一定相等.

公理 5. 整体大于部分.

公设 1. 从每一点到另一点可引直线.

公设 2. 每条直线都可以无限延长.

公设 3. 以任意点为中心可作半径等于任意长的圆.

公设 4. 凡直角都相等.

公设 5. 同平面两直线与第三直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则该两直线必在这一侧相交.

从上述公理与公设的内容可以看出,公理与公设二词在稍有不同的意义下被使用:公理被认为对一般学科皆真;公设则是当时被认为正确的几何学假设. 就在这样的基底上,构筑起宏伟大厦. 从这寥寥 10 条似乎不证自明的公理与公设出发,欧几里得一个接一个地顺着有序的链条证明了 465 个不容怀疑的基本命题. 靠着环环相扣的推理,命题与命题之间内在的有机联系被清楚地揭示出来. 那些被证出的命题并不都能一眼看出是显然成立的,例如:三角形内角和为 180°,正多面体只有 5 种,等等,并不都显然成立,但都不容置疑! 问题就在于,欧几里得证明这些命题所使用的推理方法正是亚里士多德先已系统建立起来并已被当时学者们普遍接受的演绎法,其规则保证能够从已知正确的前提出发推出一定是正确的新的结论. 只要愿意,任何人都可以去实测成千上万个不同三角形的内角,并得出结论:三角形内角和为 180°. 但这种由实测得出的结论不会被当作数学定理认可. 数学上只认可演绎证明出来的结论,那才是不容置疑的.《几何原本》把理论思维的力量、逻辑的力量,光彩夺目地表现出来. 从此,"演绎证明"便成了人类数学王国的宪法.

至今人们仍在猜测《几何原本》的写作目的. 有人估计这部著作是为学生课本编写的[9]. 不管怎样,《几何原本》的教育学意义难以估量. 长时期以来,它事实上是全人类共同的教科书.

爱因斯坦(A. Einstein,1879～1955)曾回忆:

"12 岁那年,我经历了性质截然不同的另一个'奇迹':新学年开始时,我得到一本关于欧几里得平面几何学的小册子. 书中的断言比比皆是,举例说,三角形的三条顶垂线交于一点——这固然不是显见的,却可以非常明确地把它证明出来,绝不会产生任何疑问. 这种明确的不容动摇的说法,给我一种难以形容的印象. "[10]

爱因斯坦对欧几里得的成就还在下一段话里作过高度评价:

"西方科学的发展以两个伟大成就为基础,那就是:希腊哲学家发明形式逻辑体系(在欧几里得几何学中)以及通过系统的实验发现有可能找到因果关系(在文艺复兴时期). "[11]

§1.2　皮亚诺自然数理论

古希腊学者为人类早期数学建立的几何形式的基础，随着数学的发展显得太狭小、太不适宜了．经历漫长的过程，几何在数学中的统治地位终于被动摇．从17世纪开始，数学进入了蓬勃发展的革命时期——分析数学大发展时期．期间，几何本身也发生了重大变革．19世纪末，人们发现：数学在一定意义上向毕达哥拉斯"万物皆依赖于整数"的思想回归——当时已十分庞大的数学王国竟可以在自然数理论的基础之上建立起来．德国数学家克罗内克(L.Kronecker，1823～1891)曾风趣地说："上帝创造了整数，其他一切都是人造的．"[12]

1.2.1　分析数学——数学的新阶段

(一) 代数缓慢崛起

代数，从古希腊时期依赖于几何到摆脱几何的束缚走向独立强大，是在长时间内逐渐实现的，其中有一系列重要步骤，如：十进制记数法的普遍使用，用符号代替文字叙述，对无理数与负数的承认，对于数的运算规则的熟悉，解方程知识的大量积累，等等．解决实际问题的需要，把算术与代数一步步推上了数学的前台．到了欧洲的文艺复兴时期，这一进程突然加速，主要表现为：趋于定型的代数符号的大量使用，三次、四次代数方程有了解法，对数的发现与应用，等等．

代数方法的丰富、灵活与精确使代数在应用中越来越充分地显示出优越性．到这时，解析几何建立的条件成熟了．

(二) 解析几何——数学的转折点

坐标的概念在古希腊时代(甚至更早)就曾出现过，当时被用来测量与绘图．古希腊数学家阿波罗尼斯(Apollonius，公元前262～前190)在系统研究圆锥曲线时已用几何方式给出了圆锥曲线的方程．14世纪法国数学家奥雷斯姆(Oresme，约1323～1382)用坐标确定点的位置，并明确引进了直线方程，但尚不能说解析几何已经建立．这一学科的建立，一方面要依赖于代数符号的发展与代数方法的成熟；另一方面则决定于17世纪天文、力学等科学技术对曲线研究的迫切需求．现在人们一般认为解析几何的建立首先应归功于法国数学家、物理学家、哲学家笛卡儿(R.Descartes，1596～1650)，也归功于同时代的法国数学家费马(P.de Fermat，1601～1665)．

解析几何的思想是：采用坐标法把曲线等几何对象转换成代数方程，从而

可用代数方法对这些几何对象进行研究. 有了解析几何之后,代数的地位发生了根本变化. 代数非但不再像古代那样依附于几何,相反,它把几何当作应用自己方法的领地.

16 世纪,人类的社会实践使自然科学与数学研究的中心课题转向运动,转向各种变量之间的关系. 解析几何里,方程的未知数已转化为变量,这样,解析几何就为研究变量之间关系的微积分适时提供了几何舞台. 恩格斯(F.Engels,1820～1895)曾说:

"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数、运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了. "[13]

(三) 微积分诞生

17 世纪后半叶诞生的微积分,主要起源于几何与力学.

几何上有两类传统问题:第一类问题是求曲线的切线,第二类问题是求图形的面积. 从古希腊的阿基米德(Archimedes,约公元前 287～前 212)起就有大量学者进行过有成效的研究.

力学上有两类问题:第一类是求运动速度,第二类是求路程.

几何第一类问题与力学第一类问题密切相关,是微分学解决的典型问题;几何第二类问题与力学第二类问题也密切相关,是由积分学解决的. 重要的是,第一类问题与第二类问题之间存在着内在的联系,这种内在联系事实上就是微分与积分之间的互逆关系. 揭示出这种关系是微积分理论成熟的标志. 这件事主要归功于英国物理学家、数学家牛顿(I.Newton,1642～1727)与德国数学家、哲学家莱布尼兹(G.W.Leibniz,1646～1716). 微分与积分之间联系的一个重要公式被称作牛顿-莱布尼兹公式,它是微积分的精华. 正是牛顿、莱布尼兹,把众多学者曾贡献过的重大工程终于完成了. 在这众多学者中,牛顿的老师巴罗(I.Barrow,1630～1677)的工作最为杰出,他是认识微分是积分的逆运算的第一人.

(四) 分析数学大发展

微积分的诞生,开创了数学的新时期——分析数学大发展时期.若把初等数学简单地说成是常量数学,则分析数学便可说成是变量的数学. 分析数学的研究对象——函数,或变量与变量之间的关系,是从几何、力学及其他自然科学中抽象出来的,其研究成果有广泛的应用.

从微积分诞生起的两个多世纪里,分析数学在应用中发展壮大,逐渐成为数学的主体. 它的一个个分支相继(或与微积分同时)建立:无穷级数,常微分方程,偏微分方程,微分几何,变分学,复变函数和解析数论,等等.

从诞生之日起分析数学就在自然科学中显示出巨大威力. 各种物理规律

一个接着一个得到了精确的表述,精确的程度令人折服.借助于分析数学,人们越来越清晰地看见了一个量化的世界.

1.2.2　分析数学的基础危机

微积分以无穷小概念作为工具,故有时被叫做无穷小分析.在微积分诞生之初,无穷小被直观地随意使用.微商概念的典型现实原型——瞬时速度,被理解为无穷小时间间隔内的平均速度.研究非均匀的变化,用无穷小方法是很自然的,但无穷小是什么?并不十分清楚.谈到无穷小(及相关的无穷大)的合法性,莱布尼兹在1687年的一封信中说:"目前,我承认这可能尚未解决."[14]

英国大主教贝克莱(G.Berkeley,1684～1753)在1734年的《分析学者》一书中嘲笑无穷小为"消失了的量的鬼魂".他说:"在进行微分运算时,竟从不脸红地首先承认,然后又舍弃无穷小量.依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果."[15]

贝克莱的种种非难切中问题的要害.有人对贝克莱的非难给予回击,但都软弱无力.

分析数学在微积分诞生之后很长时间内,并没有严密可靠的基础,这一事情常被说成是"第二次数学危机".事实上,这只是当时数学基础的危机.大多数数学家对此或不太在意,或无暇顾及.许多人也想解决危机,但不成功."解释和评价牛顿、莱布尼兹的方法的书卷帙浩繁且谬误连篇"[16].

微积分诞生之后的200年,数学上是英雄辈出的革命时期.分析数学尽管缺少逻辑支持,但能通过自然科学的胜利为自己开辟前进的路.人们能预言哈雷彗星的回归,能以万分之一的精度观测到由数学计算所预言的神秘的海王星确实存在,谁又能怀疑数学的真实性?

革命顾不上现存法律,需要的是冲锋陷阵.法国数学家皮卡(C.E.Picard,1856～1941)在1905年说过:"如果牛顿和莱布尼兹知道了连续函数不一定可导,微分学将无以产生."[17]

这是数学历史上特定时期出现的矛盾现象:一方面,成果辉煌;一方面,逻辑混乱.除了无穷小引起的矛盾,还存在着无穷级数使用上的混乱.例如,下面的级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

是什么?是1,是0,还是1/2?各有说法.又如,有人常把幂级数当作多项式来运算.不正确地使用无穷级数引出许多错误的证明和错误的结论.分析数学的成果越多,需要澄清的困惑与矛盾也越多.越来越多的人开始关注分析

数学的基础,渴望重建数学王国的"法律秩序".

寻找基础的困难超出了人们的想象. 问题在哪里? 原来,问题是由分析数学所承担的任务引起的,这个任务是:精确地表现运动与变化. 为了精确表现运动与变化,必须跟无限打交道;而在有限与无限之间,不能照常规随意通行. 习惯于有限思维的人类面对无限,困难可想而知.

整个18世纪,许多人,包括最伟大的数学家——瑞士的欧拉(L.Euler,1707~1783)与法国的拉格朗日(J.L.Lagrange,1736~1813)在内,都去努力克服危机,但都未成功.

在拉格朗日提议下,由拉格朗日任主任的柏林科学院数学分部于1786年特地设立一个奖项. 竞赛宣言中说[18]:

"数学的功用,它所受到的尊敬,'精确科学'这一极为贴切的桂冠,源于其原理的清晰、证明的严密及定理的精确. ……一些当代著名分析学者则承认无穷量的术语是矛盾的.

因此,科学院期望有一个解释来说明为什么一个矛盾的假设却推出了那么多正确的理论,还希望有一个确切、清晰的描述,简而言之,一个真正的数学原理,它也许可以完全代替无穷……"

竞赛结果是:问题没有得到满意的答复. 尽管如此,在23位应征者中,瑞士的惠利尔(S.L.Huillier)获了奖. 他题写的一句话是:"无穷,是吞没我们思想的深渊."

1.2.3 分析算术化

经历无数失败与挫折之后,为分析数学寻找基础的工作渐渐有了眉目,"法律秩序"随之渐渐恢复. 这个过程就是19世纪的分析算术化过程,于19世纪末期完成. 过程大体包括三个阶段:

第一阶段——极限论建立,主要以法国数学家柯西(A.L.Cauchy,1789~1857)与德国数学家魏尔斯特拉斯(K.T.W.Weierstrass,1815~1897)的工作为标志;

第二阶段——实数理论建立,主要以德国数学家戴德金(J.W.R.Dedkind,1831~1916)、康托尔(G.Cantor,1845~1918)与魏尔斯特拉斯等人的实数构造理论为标志;

第三阶段——算术化过程完成,以意大利数学家、逻辑学家皮亚诺(G.Peano,1858~1932)的自然数理论为标志.

在这过程中,数学家们艰难但开始卓有成效地跟无限打交道,从而在达到分析算术化的目的同时,也将人类数学的理论思维能力提高到了一个新高度.

(一) 极限论的建立

1754 年,法国数学家、物理学家、哲学家达朗贝尔(J.L.R.D'Alembert, 1717～1783)就曾提出过极限的方法,但未完善形成理论. 追溯到人类古代数学(包括古代中国[19]),早已有极限思想.

柯西在他 1821 年的著作《代数分析教程》中,给出了极限论的奠基性工作. 他先定义了变量与函数的概念,接着定义了变量的极限概念;进一步,他把无穷小定义成"极限为零的变量",使无穷小摆脱了神秘感. 这样,就可以在极限与无穷小量的基础上建立起微积分理论,引出了微积分一系列的基本概念:连续,导数,微分与积分,等等. 他还明确区分了无穷级数的收敛性与发散性.

柯西的著作影响很大,有人称他是当时"惟一一个知道怎样对待数学的人". 但是柯西理论所用的关键语言是不够精确的,如与极限有关的定义中,使用"无限趋近","无限减小","愈来愈接近于……"这类求助于直观的用语. 他书中的一些结论有误. 他仍未能区分连续性与可微性,更未能区分连续性与一致连续性. 此外,他的极限论所依赖的实数概念是直观的,不严格的.

稍早,捷克数学家、哲学家波尔察诺(B.Bolzano,1781～1848)也致力于分析的严密化工作,但很迟他的工作才被人注意.

更严格的极限论是魏尔斯特拉斯建立的. 在这方面,他的贡献是:极限定义使用了严格的 ε-δ 语言,论证了连续函数的性质,给出了一个处处连续处处不可微的函数,引进了函数项级数一致收敛概念,使级数理论更严格,第一个认识到分析的严密化需要有精确的实数理论,并提出了构造实数的一种方法,等等. 他的工作使分析数学完全摆脱了对直观(特别是几何直观)的依赖. 可以说,分析的严密化是由魏尔斯特拉斯最后完成的.

(二) 什么是实数?

分析数学的展开,以实数为前提. 在分析数学发展过程中遇见矛盾、混乱与困惑时,无人怀疑实数概念本身有什么问题. 当分析的概念由于极限论的建立而被认为已经得到澄清之后,人们用相同标准的严格眼光回头看,才发现实数概念本身需要给予澄清:

第一,究竟什么是实数?(当然,要离开几何直观来回答.)

第二,从哪些更基本的概念与事实出发可以推导出实数所具有的性质?

困难在于无理数. 正是无理数曾让古希腊人感到困惑. 两千多年后,人们仍然要面对它,且不能再回避了.

极限论建立之初,不少人(包括柯西)从直观上把无理数理解为有理数列的极限. 但这种理解不能解决问题,因为有了实数(包括无理数)概念之后,才

有合适的极限概念. 尽管如此,问题解决的条件已经成熟了. 技术上的条件已经具备,差的只是观念上的改变.

建立实数理论这一重大课题,除了魏尔斯特拉斯,还吸引了众多数学家,各种方案纷纷提出. 这些方案有一个相同点:都是从有理数及其性质出发.

种种方案大体上可分为两类. 两类中最典型的方案分别由德国数学家戴德金(J.W.R.Dedkind, 1831 ~ 1916)与康托尔(G.Cantor, 1845 ~ 1918)在1872年同一年内建立. (魏尔斯特拉斯的理论与康托尔的类似.)

戴德金的实数定义是:一个实数就是有理数集的一个分割,即有理数集的左右一分为二的一个剖分. 若一个分割的左边部分无最大数且右边部分无最小数,则把此分割(注意:是把分割本身,即左右一对集)叫做无理数;否则就把它叫做(新)有理数. 用适当方式对这些分割定义加法运算、乘法运算与序之后,可以证明:有理数集这些分割的全体形成一个完备序域(即实数域).

戴德金的定义从几何上考虑是清楚的:把直线分割成左、右两部分,便存在(且只存在)一个点是那两部分的界点. 正是该点的存在才表现出直线的连续特征. 戴德金曾指出,它定义实数的方法是受欧几里得《几何原本》(第五卷)中的思想影响的[20].

康托尔的方法是:用有理数基本序列(准确说,有理数基本序列的等价类)来定义实数. (数列$\{x_n\}$是基本序列,指$\{x_n\}$满足条件:任给$\varepsilon>0$,存在自然数N,每当$n,m>N$时都有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.)在定义了加法、乘法及序之后,也得到一个完备序域.

如果说戴德金的方法来自几何的启发,那么康托尔的方法则是出自极限论本身的思考. 基本序列的概念原是由柯西引进的,被称作"Cauchy 序列". 柯西知道:基本序列就是有极限的序列. 有理数基本序列的极限不一定是有理数. 如果极限不是有理数,那么这个有理数基本序列本身就被康托尔用来定义无理数. 这件事情上,柯西与康托尔的差别只有一步. 这一步之差是观念上的:康托尔把基本序列这个无限的对象作为整体视为一个点.

康托尔的"Cauchy 序列"方法常被用于一般度量空间的完备化. 在有了极限论的知识以后,这个方法是比较容易理解的. 但数学分析的课本一开头一般不采用这个方法.

上述给实数下定义的方式还有一个显著的共同特征:每种定义都涉及有理数的某种无限集. 定义中,无限集是作为整体被使用的,用它们定义出来的"数"与人们关于数的直观概念相去甚远. 正因如此,这些方法似乎都显得很不自然. 有人说:"逻辑地定义出来的无理数是一个智慧的怪物"[21].

本书中,我们将另找出路,尝试用更自然的方法来建立实数概念(详见第

四章).

（三）皮亚诺自然数理论

建立了实数概念之后,追本溯源,就要问:什么是有理数？有理数性质从何而来？

数学史上出现了非常有趣的现象:各种数系理论建立的时间顺序与这些数系之间的逻辑顺序恰恰相反.走完了从有理数到实数的路,接着人们用整数来定义有理数,由整数性质推出有理数性质;然后,又由自然数及其性质导出整数及其性质.最终,自然要问:什么是自然数？其性质从何而来？

皮亚诺在他1889年的著作《算术原理新方法》中提出了自然数公理,后曾略作修改.这组公理事实上给出了自然数集的定义,现被称为"Peano公理".稍早,戴德金已提出过大体相同的理论[22].

皮亚诺自然数公理如下:

PA1.零是个自然数.

PA2.每个自然数都有一个后继(也是个自然数).

PA3.零不是任何自然数的后继.

PA4.不同的自然数有不同的后继.

PA5.(归纳公理)设由自然数组成的某个集合有零,且每当该集合有某个自然数时便也同时含有这个数的后继,那么该集定含有全部自然数.

以上公理中,除去自然数,尚有两个未加定义的概念:零与后继.（当然,公理中还用了集的概念.）

这样,我们来到了古典数学的源头.

Peano公理中惟一不平凡的是归纳公理,它就是用集语言叙述的数学归纳法.这一公理是皮亚诺理论的基石.数学归纳法是意大利数学家毛诺里克斯(F.Maurolycus,1494～1575)在他1575年的著作《算术》中首先认识的.后来法国数学家、物理学家、哲学家帕斯卡(B.Pascal,1623～1662)在他1665年的著作《三角阵算术》中首次给出了数学归纳法的清楚的应用实例.

可以说,依靠数学归纳法,分析数学才成为严格意义上的演绎科学.正是数学归纳法这块"基石",支撑起整个古典数学的"大厦".

1.2.4　分析数学中的无限

数学中的无限是从现实世界中抽象出来的概念,与对运动、变化的研究密不可分.

公元前5世纪,古希腊哲学家芝诺(Zenon Eleates,约公元前490～前436)以悖论的形式揭示出运动概念中包含着有限与无限的矛盾.芝诺悖论之

——"阿基里斯和乌龟"可简述如下：

希腊英雄阿基里斯永远追不上乌龟. 因为在阿基里斯起跑时，在他前面的乌龟已开始向同一方向爬行. 当阿基里斯达到乌龟的地点时，乌龟又爬行了好长一段路；这种情况在阿基里斯和乌龟都要走的余下的路段上重复着[23].

芝诺发现运动中包含着矛盾后，错误地断言运动不真实，进而否定世界万物的生灭变化，认为只有"惟一不动的存在"才是真实的.

芝诺悖论使当时的人们感到困惑，难以解答. 在古希腊人眼中，无限是神秘的，无法达到的，甚至是令人恐惧的.

亚里士多德曾提出了"潜无限"概念. 他认为："只有潜能上的无限，……不会有现实的无限. ""说'无限'潜在地存在，……只是对于知识而言. 因为，分割的过程永远不会告终"[24]. 他甚至说，数学家"不需要无限，也不使用无限. 他们只是假设有限的直线能随意延长而已"[25]. 欧几里得在《几何原本》中，明显地回避无限.

从此，回避、排斥无限成了数学上的传统.

到了 17 世纪，微积分的先驱们开始违背这个传统. 实践的需要引导他们去研究运动与变化. 这时，无穷量成为他们手中不可缺少的武器. 为了冲锋陷阵，他们被迫拿起无限这个武器.

分析数学的发展过程，是人类智力拼搏的过程. 经历了一次次挫折并积累了大量经验之后，人类终于有了认识无限的方法——极限论.

极限论中，为了精确定义数列与函数的极限概念(进而建立起精确形式的微积分理论)，人们采用了 ε-N、ε-δ 语言. 这种语言的思想是：通过有限认识无限，用有限的手段把握无限的过程. 从形式上看，这显然仍是局限在潜无限的框架内，但实质上承认了无限过程的终结，承认了无限向有限的有条件的转化(数学等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$ 本身便已说明问题).

可以从极限与无穷级数理论来看芝诺的"阿基里斯和乌龟"悖论. 芝诺设置疑难的方式是：第一，把有限分割成无限；(可以分割，同意吗?)第二，无限只能是潜无限，(同意吗?)而潜无限是没有终结的. 在这个疑难中，如果我们同意物质空间可以无限分割，那么，从数学上看，阿基里斯追赶乌龟过程的路程与时间不过是两个收敛的无穷级数. 特别地，其中的时间级数不是发散的，这是关键. 极限论的思想是：无限在一定条件下转化为有限. (从物理上看，芝诺在这个悖论中片面强调了物质的连续性(可以无限分割)而绝对否定了离散性. 物理告诉我们，连续性与离散性二者都必须坚持. 与此类似，"一尺之棰，日取其半，万世不竭"，从物理上看，不合理. "日取其半"，取到一定程度，量变

引起质变,就不能简单地再"取半". 应指出,连续性与离散性二者都必须坚持这一结论,首先是由哲学思考得出的.)

对极限论自身的不足,有以下思考.

极限论作为数学上认识无限的工具,本质上对传统有所突破,但形式上却维护了旧的传统. 它把有争议的无穷量(无穷小量与无穷大量)作为变量以潜无限的形式纳入自己的理论. 它把过程与过程的终结人为地形式地割开,割开之后再机械地联系. 这样一来,微积分诞生时生动活泼,被莱布尼兹视为"理想元素"的实无穷小因违背传统(也因暂不合逻辑)而被赶出了数学. ε-N、ε-δ 方式虽保住了逻辑严格性且未违背传统,但原无穷小分析的简易性与生动性已荡然无存. (只在物理与工程技术中,直观无穷小仍在被经常使用.) 对此,美国数学家戴维斯(M. Davis)和赫尔胥(R. Hersh)曾评论道:

"直觉上清楚、物理上可测得的量,即瞬时速度,变成了难以捉摸的极限概念","我们用了两个在某种意义上说来是和速度 v 无关的新量 ε 和 δ 之间的难以捉摸的关系来定义 v. ……而事实是:按实际意义,在我们了解这定义之前,我们已经知道瞬时速度是什么了;而只是为了逻辑上没有矛盾,我们接受了一个比要定义的概念难懂得多的定义. "[26]

用极限论来认识无限,毕竟只是初步. 尽管如此,它仍不失为数学认识无限而迈出的有成效的重要一步. 人类数学对无限的认识会继续深入,但无论深入到何等程度,ε-N、ε-δ 方法作为用有限认识无限的一种方法,都会继续起一定作用.

真正打破传统,是从实数理论的建立开始的. 严格的实数理论让实无限以无限集的形式正式进入数学. 不管是现有实数理论的哪一种,都涉及无限点集,都把有理数的某种类型的无限集作为整体来定义单个实数,并进一步在这些实无限对象之间定义代数运算和序,这样做便能够从离散的有理数集过渡到实数连续统.

前面曾提到康托尔与柯西之间关于无限观的差别. 柯西与康托尔的一步之差是:柯西提出了基本序列概念,但仍留在传统;康托尔则带着基本序列(Cauchy 序列)走出了传统.

在认识无限的路上,数学没有止步,也永远不会止步. 随着分析数学严密化的完成,把实无限当作自己研究对象的集论已孕育成熟,并随即诞生. 而它的诞生则意味着数学即将进入一个崭新的更高的发展阶段——现代数学.

1.2 附1 几何学自身的重大变革

(一)几何学为什么被认为是数学且被归为数学?

历史上,几何学是研究三维物理世界的空间形式(加上时间,则是四维时空形式)的学科. 这种狭义的几何学实际上应该是物理学的一部分,是物理学中较为单纯且较早理论化的那一部分. "从来源说,它像力学一样是一种物理的理论."[27] 牛顿曾认为几何只是力学的一部分. 德国数学家高斯(G.F.Gauss,1777~1855)在认识到非欧几何的合理性之后也曾说:"我们只能将几何与力学相提并论."[28]

但是,为什么从古代起人们就毫不含糊地把几何学归为数学? 这是因为,早先的几何学在形成自己的演绎体系之后,便让算术、代数与三角依附于它,并与它们密不可分地纠缠在一起,形成了人类数学的早期阶段——初等数学或几何数学.

狭义几何学在数学中的统治地位早已不复存在. 但直到今天,它仍然是许多数学新思想的摇篮. 它为抽象的数学概念提供直观图景,为各种复杂的数量关系提供表演舞台,且继续充当数学与物理的中介. 更值得注意的是,几何学自身在不断脱胎换骨地变革,与整个数学同步发展,从而能够始终与其他数学分支密不可分地融合在一起,保持着自己的基础数学学科的地位.

(二)非欧几何的诞生

几何学中的一次重大变革起因于《几何原本》的第五公设:

同一平面内,若一直线与两直线相交,且在某一侧所交两内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必在这一侧相交.

与其他公理、公设相比,第五公设的表述欠简洁. 说它"不证自明",有些勉强.《几何原本》中直到第29个命题才首次用到它. 可以推测,欧几里得先是想把它证出来,不成,才不得已将它列为公设.

这一公设现被称为"平行公理",是因它等价于命题:

平面上过直线外一点至多引一条直线与原直线平行.

深思熟虑的欧几里得没有采用更简洁、更可信的方式给出第五公设,除去想尽量回避无限之外,可能的原因之一,似乎是他有意提请后人注意:第五公设可否省去? 可否用其他九条公理与公设把它证明出来?

果然,在此后长达两千多年的时间内,不计其数知名或不知名学者用大量精力,采用不同方式尝试证明第五公设,有人甚至为此献出终生. 直到19世

纪，才有人终于被迫相信，所有这种努力都是徒劳的；欧几里得第五公设不能从十条公理与公设中的其他九条证出来，它是完全独立的；若用平行公理的否定命题来代替欧几里得第五公设，即假定：

平面上过直线外一点至少可引两条直线与原直线平行，

则可以平行地建立起一种几何理论，这种新理论与欧几里得的理论一样，在逻辑上也是合理的.

这样，一种新型几何学——非欧几几何学诞生了.

上述非欧几何常被称为罗巴契夫斯基几何. 这种新几何的建立主要归功于俄国数学家罗巴契夫斯基(N.I.Lobachevsky，1793～1856，成果公布、发表于1826～1830年)、匈牙利数学家鲍耶((J.Bolyai，1802～1860，成果发表于1932年)和高斯(G.F.Gauss，1777～1855，更早得到成果，但未公开发表). 在他们之前还有数位学者已接近这一成果.

新几何学诞生之初，并未立即被普遍接受. 它的许多结论与常识相悖，如"三角形内角和小于180°"，"不存在矩形"，等等. 要更多人相信这种奇特理论的合理性，必须等待关于合理性的严格证明.

1870年，德国数学家克莱因(C.F.Klein，1849～1925)用给新理论建立模型的方法证明了上述几何相对于欧几里得几何的无矛盾性(即：如果欧几里得几何是无矛盾的，那么新几何也是无矛盾的). 具体做法是：在欧几里得平面的一个圆内，把不带端点的弦叫做"直线"，点仍叫做"点"，然后用适当方式重新定义"移动"，使得"线段的相等"与"角的相等"有了新的意义. 可以逐一验证新几何的每个公理(进而知每个定理)都对应于圆内欧几里得几何相应的一个真命题，从而知道新几何理论是无矛盾的，除非欧几里得几何本身原先就有矛盾；至此，才证明了新几何理论是逻辑上合理的.

1854年德国数学家黎曼(G.F.B.Riemann，1826～1866)提出了另外一种非欧几何，它具有更为奇特的性质，如"直线无界但非无限长"(这与欧几里得第二公设矛盾)，"平行线根本不存在"，"三角形内角之和大于180°"，等等. 这种几何也有一个模型：三维欧几里得空间里的球面(把球面上的大圆看作"直线"，对径点看成同一点)，从而也具有相对于欧几里得几何的无矛盾性.

于是我们有了三种几何：欧几里得的、罗巴契夫斯基的与黎曼的几何. 他们被分别称为抛物几何，双曲几何与椭圆几何. 就这样，19世纪几何出现了多元化.

(三) 非欧几何引起的思考

(1)*哪一种几何是正确的?*

在非欧几何诞生之后的很长一段时间内,绝大多数数学家还都相信惟有欧几里得几何才是正确的. 19 世纪初叶的欧洲,哲学上占统治地位的是康德(E. Kant,1724～1804)的先验哲学. 在康德的理论中,欧几里得的几何公设是与人类经验无关的"先验知识",是普遍必然和绝对不变的. 当时,"谁要是持相反的观点,就会被视为狂人"[29]. 在这种环境中,高斯未敢公开发表他的具有革命性的研究成果.

但是高斯,还有罗巴契夫斯基与黎曼,他们都相信新几何学不但在逻辑上是合理的,在物理上也会是合理的;新几何理论与现实物理空间的关系要靠实验来确定,而不是先验的. 为此,高斯与罗巴契夫斯基还分别进行了实际观测.

不久非欧几何的客观真理性便被物理的发现证实. 人们最终承认,欧氏几何作为非欧几何的极限情形只不过在一定范围内才近似正确. 这一现象有时被说成是"真理丧失"或"确定性丧失". 事实上,丧失的不是真理,而是真理的先验性.

(2) *欧氏几何的基础*

对《几何原本》第五公设长达两千余年的研究,导致产生了非欧几何. 同时,在这一研究过程中,人们也用更严格的眼光审视了欧氏几何自身的演绎体系,发现它逻辑上的漏洞很多. 如何使欧氏几何更加完善,引出了大量的研究.

德国数学家希尔伯特(D. Hilbert,1864～1943)经研究整理,于 1899 年出版了《几何基础》一书(后多次修改),得到欧氏几何的一个近代公理系统. 该系统包括一些不加定义的原始概念,其中有 3 个基本元素(点、线、平面)及几个基本关系("在……之上","在……之间","合同(相等)于"等);这些元素与关系满足 5 组公理(结合公理、顺序公理、合同公理、平行公理及连续公理,共 20 条).

关于这个公理系统,首要问题是:它是否无矛盾?

希尔伯特(对平面几何)是这样做的:把点视为实数对(x,y);把线视为有序实数比 $a:b:c$(其中 a 与 b 不全为 0);"点(x,y)在直线 $a:b:c$ 上"指"$ax+by+c=0$ 成立";线段相等与角相等可用解析几何的通常方法来确定. 这样,每个平面几何命题都可转化为某个代数结论.

可以看出,上述做法是用解析几何方法把欧氏几何解释为实数理论. 得

出的结论是：如果实数理论无矛盾，那么欧氏几何也无矛盾，因为几何中的矛盾必对应于代数中的矛盾．这就建立了欧氏几何相对于实数理论的无矛盾性．

平行公理的研究使人察觉：自古希腊时期，人们就常常不自觉地在几何中过多地依赖直观，把一些看似可信的直观事实搀和进演绎证明中去，这时，一种不安全感出现了．究竟什么是几何学可以信赖的基础呢？希尔伯特的工作使人看到，欧氏几何的基础是实数理论．

希尔伯特的公理方法在向形式化方向演进．该公理系统中，基本概念没有规定，没有特定的含义，允许对它们作不同解释．希尔伯特曾形象比喻："我们必须能够不用'点、线、面'，而说'桌子、椅子、酒杯'．"基本对象之间的关系是由该系统中的公理规定的．推理过程中，一切与推理无必然联系的内容都被弃之一旁．这样做，使人们在思维过程中，一边可以求助于直观，同时又可以摆脱由直观可能引起的误导．当然，形式化的意义远不止于此(本书后面还要讨论)．

形式化的系统中，基本对象间的关系是抽象的，但不是没有实际意义的．实际上，这种抽象的关系是对现实对象之间某种关系的提取．毫无实际意义的纯形式符号游戏不会有任何生命力；如果在数学中出现，是会被淘汰的．

(3) 相对无矛盾性证明方法的逻辑意义

人们在非欧几何领域所作的长期顽强的努力在给几何学自身带来重大变革的同时，也促进了数学中所使用的逻辑方法的创新．这种创新，除了上面所谈到的公理方法向形式化方向迈进这一点外，还表现在模型方法的使用．

从形式上看，非欧几何与欧氏几何是直接互相对立的，但同时它们却都是合理的理论．前面我们已介绍了这种现象的逻辑解释——用建立模型的方法可将非欧几何转化为适当范围的欧氏几何，从而证明了非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性．后来，希尔伯特也用建立模型的方法将欧氏几何理论转化为代数，从而证明了欧氏几何相对于实数理论的无矛盾性．

模型方法不同于数学中传统的逻辑思维，对逻辑本身产生了有深远意义的影响．20 世纪，数理逻辑逐渐形成了一个重要分支——模型论．

(四) 非欧几何之树开出的绚丽花朵——黎曼几何

德国数学家黎曼(G.F.B.Riemann，1826～1866)是人类历史上少数几位最受尊敬的数学家之一．在那贫病相随的短暂一生中，他竟然在当时数学的几乎所有重要分支前沿都作出了杰出的、开拓性的重大贡献，令人惊叹．贡献之一，便是 1854 年诞生的黎曼几何．

黎曼从高斯关于曲面的研究成果出发,将曲面概念推广到任意维数的可局部欧几里得化的空间,在此基础上展开他的几何理论. 他的思想和方法开创了几何学的纪元,让几何学得到一次解放. 从此,几何学从三维物理空间走出来,后经众多几何学家的努力,演化成现代几何,并与其他数学分支在更高层次上融合、纠缠在一起.

当今现代几何的演化发展,一方面,通过现实物理空间这一中介使数学各分支不但与几何,而且也与物理紧密结合而无法分离;另一方面,几何自己的研究对象更加扩张,几乎渗透到数学王国的每个角落. 陈省身先生说:"将来数学研究的对象,必然是流形[30]".

1.2 附 2 虚数是怎样进入数学的?

人们常简单地说:为了使方程 $x^2+1=0$ 有解,就把数系扩大,引入虚数 $i=\sqrt{-1}$. 对此立即要问:为什么要去解这个看去毫无实际意义的方程?

事实上,回顾历史可以知道,人们接触虚数、复数,是解三次方程的需要,是迫不得已. 而求解三次代数方程,则是社会实践的需要,例如涉及体积计算的实际问题就常要求解三次方程.

两千多年前,人们已经有了解二次代数方程的算法. 每当遇到负数开方,便弃之不理,并说问题无解. 但求解三次方程,则情况不同. 那是在文艺复兴时期的意大利,在激烈的竞争中,经过智力拼搏,人们发现了三次方程的一般解法(这是人类 16 世纪最大的数学成就). 发现一般解法的经过大致如下. 数学家菲尔洛(S.del Ferro,1465~1526)在阿拉伯数学家海牙姆(O.Khayyam,约 1048~1122)早先的几何方法的基础上得到了一种算法[31]. 按当时的保密风气,他没有发表他的算法,他将方法秘传给学生,由学生向宣称会解三次方程的数学家塔尔塔里亚(N.Tartaglia,1499~1557)提出挑战. 后者苦苦思索之后,起而应战. 激烈的擂台竞争塔尔塔里亚全胜. 塔尔塔里亚的解法后来由数学教授、医生卡尔丹诺(G.Cardano,1501~1576)于 1545 年发表. 现将经数学家邦别利(R.Bombelli,1526~1572)于 1572 年作了重要补充的完整求根公式(被称作 Cardano 公式)写出如下.

三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根:

$$x_1=y_1-\frac{a}{3},\quad x_2=y_2-\frac{a}{3},\quad x_3=y_3-\frac{a}{3},$$

其中

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\omega_1+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\omega_2,$$

$$y_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\omega_2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\omega_1,$$

$$p=\frac{3b-a^2}{3},\qquad q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27},$$

$$\omega_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \omega_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

我们知道,三次方程可能有三个实根.在用 Cardano 公式求根的过程中,要遇见负数开方.敢于对负数开方,运算到底,才能求出所需要的全部实根.(至少有一个实根!)下面的例子便能说明这一点.

例　按 Cardano 公式,方程 $x^3-15x-4=0$ 的三个根:

$$x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+11\mathrm{i}}+\sqrt[3]{2-11\mathrm{i}}$$

$$=\sqrt[3]{(2+\mathrm{i})^3}+\sqrt[3]{(2-\mathrm{i})^3}=2+\mathrm{i}+2-\mathrm{i}=4,$$

$$x_2=(2+\mathrm{i})\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}+(2-\mathrm{i})\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=-2-\sqrt{3},$$

$$x_3=(2+\mathrm{i})\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}+(2-\mathrm{i})\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=-2+\sqrt{3}.$$

读者不妨动手用 Cardano 公式算出方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的三个根.答案是 1,2,3.

现在我们看到,为了求出各种情形三次方程的实根,人们被迫接受对负数的开方运算.可以得出结论:让虚数、复数进入数学,并非个人行为,而是众多数学家长期奋斗的结果,是不得已才这样做的.归根到底,是社会实践的需要.

"虚数"名称是笛卡儿首先创用的(记号 i 则由欧拉最先引进).很长时间内,虚数究竟是何物,人们并不清楚;只是当作必要工具对它们进行形式计算.1833 年,爱尔兰数学家、物理学家哈密顿(W.R.Hamilton,1805～1865)把复数视为实数有序对,把复数运算与实数对的运算对应.这样,复代数事实上不过是"实数对"代数,即几何上的向量代数(稍早由高斯等人从几何上给予解释).至此我们认识到,复数之间的任何确定的关系实际上都是实数之间内在的(比较复杂的)关系的表现,而不是什么神秘的东西.同时也看到,虚数、复

数并不是没有内容的纯形式数学对象，只不过人们在一段时间内没有认识到其中的内容罢了.

哈密顿没有止步. 经过 10 多年探索，在舍弃了乘法交换律之后，他从复数走到四元数. 几乎同时，德国数学家格拉斯曼(H.G.Grassmann, 1809～1877)独立研究超复数，于 1845 年发表《多元数理论》.

在拉格朗日等人工作的基础上，两位年轻的数学天才，挪威的阿贝耳(N.H.Abel, 1802～1829)与法国的伽罗瓦(E.Galois, , 1811～1832)对高次方程的研究做出重要贡献，致使代数开出了另一朵智慧花——群论. 代数学在 19 世纪里从方程论一步一步走出来，到了 20 世纪，则已发展成研究一般运算的具有复杂、抽象结构的高层建筑.

1.2 附 3 皮亚诺算术的适当展开

皮亚诺自然数理论是分析数学的基础. 为了理解这一点，下面让我们由 Peano 公理出发适当走一段路程. 在这之前，除了日常逻辑(包括集的直觉概念)，让我们暂且"忘掉"全部数学知识. (人生识字糊涂始. 为什么 $1+1=2$?)

可以下这样的定义：满足下面五条公理(Peano 公理)的集 **N** 叫做自然数集，**N** 的元素叫做自然数.

PA1. $0\in \mathbf{N}$.

PA2. 若 $x\in \mathbf{N}$，则 x 有且仅有一个后继 $x'\in \mathbf{N}$.

PA3. 对任一 $x\in \mathbf{N}$，皆有 $x'\neq 0$.

PA4. 对任意 $x, y\in \mathbf{N}$，若 $x\neq y$，则 $x'\neq y'$.

PA5. (归纳公理) 设 $M\subset \mathbf{N}$. 若 $0\in M$，且每当 $x\in M$ 时也有 $x'\in M$，则 $M=\mathbf{N}$.

通常，归纳公理被用来证明关于自然数的全称命题："对所有自然数 n，$p(n)$成立". 为证明这种全称命题，要且只要证明两件事：

1° $p(0)$成立；

2° 每当 $p(n)$成立时，$p(n')$也成立.

事实上，如设 $M=\{x\in \mathbf{N}\mid p(x)\}(\subset \mathbf{N})$，则由 1°与 2°知 M 满足 PA5 的前提条件(即 $0\in M$ 且当 $x\in M$ 时也有 $x'\in M$)，故由 PA5 得出结论 $M=\mathbf{N}$，即该全称命题得到证明.

直观上可以看出，Peano 公理中的任一条都不能省去，否则自然数集 **N** 就不会有下面的形象：

$$0,\ 0',\ 0''(\text{即}(0')'),\ 0''',\cdots.$$

思考题 1 如果缺少 Peano 公理的某一条,那么自然数集 $\mathbf{N}$ 可能会有什么样的形象?

思考题 2 5 条 Peano 公理够不够? 换句话问:Peano 公理所定义的自然数集 $\mathbf{N}$ 是否惟一?

Peano 公理中,0 与后继作为两个起始概念没有定义. 往下,每遇见新概念都须给出定义.

本节中如不说明,字母 x,y,z,u,v 等皆指自然数.

定理 1 $x'\neq x$.

证 令 $M=\{x\in\mathbf{N}\mid x'\neq x\}$.

1° 由 PA1,$0\in\mathbf{N}$;由 PA3,$0'\neq 0$,故 $0\in M$.

2° $x\in M\Rightarrow x\in\mathbf{N}$ 且 $x'\neq x$(M 的定义)

$\Rightarrow x'\in\mathbf{N}$(由 PA2),$(x')'\neq x'$(由 PA4)

$\Rightarrow x'\in M$.

由以上两点及 PA5 得 $M=\mathbf{N}$,即任一自然数 x 皆有 $x'\neq x$. □

定理 2 $x\neq 0$,则惟一存在 y 使 $y'=x$.(每个非 0 自然数都有自己惟一的"前邻".)

证 惟一性直接可得:由 PA4,若 $y'=x$ 且 $z'=x$,则 $y=z$.

为证存在性,令 $M=\{0\}\cup\{x\in\mathbf{N}\mid$ 存在 y 使 $y'=x\}$. 首先,$0\in M$;再假设 $x\in M$,显然有 $x'\in M$(x' 的前邻就是 x:令 $y=x$,则 $y'=x'$). 由 PA5 得 $M=\mathbf{N}$. □

作为一种特殊的二元运算,现在来定义加法.

定义 1 自然数加法,用符号 + 表示,指具有下面性质(*)的运算:

$$\begin{cases}x+0=x,\\ x+y'=(x+y)'.\end{cases}\quad(*)$$
(二式要求对任意自然数 x 和 y 都成立.)

仔细观察,发现定义 1 并未直接完整地规定 $x+y$ 是什么. 性质(*)的第二式只指出 $x+y'$ 依赖于 $x+y$. 加法定义的合理性尚需证明,即尚需证明定义 1 中的加法这个二元运算是可以实现的. 具体地说,要证明对任意自然数 x 和 y,可以规定一个自然数 $x+y$,使这种规定符合定义 1 中的性质(*).(下面定理 3 的证明如感到困难,可暂时放过,后面 3.6.2 将回到这一点.)

定理 3 定义 1 中的加法是可以实现的,即存在一个二元运算 + 具有性质(*).

证 要证明:对任意 x,可以对任意 y 规定 $x+y$,使这种规定符合性质(*).(这是一个以"对任意 x"开头的全称命题,故要用归纳公理 PA5(对 x 归纳).)令

$M=\{x\in\mathbf{N}|$ 可对任意 y 规定 $x+y$，使规定具有性质（∗）$\}$.

目标：用 PA5 证明 $M=\mathbf{N}$.

第一步，要证明 $0\in M$，即可对任意 y 规定 $0+y$，使之具有性质（∗）：

$$\begin{cases}0+0=0,\\0+y'=(0+y)'.\end{cases}$$

事实上，对任意 y，我们规定 $0+y=y$ 便可. 按此规定，就有

$$0+0=0, \tag{1}$$

$$0+y=y, \tag{2}$$

$$0+y'=y'. \tag{3}$$

由(2)和(3)可得

$$0+y'=(0+y)'. \tag{4}$$

(1)和(4)合起来，说明 $x=0$ 时对任意 y 所作的规定 $0+y=y$ 符合性质（∗），故 $0\in M$.

第二步，假设 $x\in M$，即假设对任意 y 已经规定好 $x+y$，且具有性质（∗）：

$$x+0=x, \tag{5}$$

$$x+y'=(x+y)'. \tag{6}$$

下面要证明 $x'\in M$. 为此，对任意 y，我们规定

$$x'+y=(x+y)'. \tag{7}$$

注意，在这个规定之前，上式右边的 $x+y$ 对任意 y 已有规定，这是因为已假设 $x\in M$.

现在有

$$\begin{aligned}x'+0&=(x+0)' &&\text{(由(7))}\\&=x', &&\text{(由(5))}\\x'+y'&=(x+y')' &&\text{(由(7))}\\&=((x+y)')' &&\text{(由(6))}\\&=(x'+y)'. &&\text{(由(7))}\end{aligned}$$

这就证明了对于 x'，对任意 y 所作的规定(7)具有性质（∗），从而 $x'\in M$. 上面两步证明合起来，由 PA5 知 $M=\mathbf{N}$. □

定理 4 定义 1 中的加法是惟一的.

证 假设除 + 外另有加法，用 $\oplus$ 表示，也具有性质（∗）. 于是有

$$x+0=x, \tag{1}$$

$$x+y'=(x+y)'; \tag{2}$$

$$x\oplus 0=x, \tag{3}$$

$$x \oplus y' = (x \oplus y)'. \tag{4}$$

下面证明对任意 x,y 都有 $x+y=x\oplus y$. 我们用数学归纳法的通常形式对 y 归纳证明.

$y=0$ 时,对任意 x 有

$$\begin{aligned} x+0 &= x & &(\text{由}(1)) \\ &= x\oplus 0. & &(\text{由}(3)) \end{aligned}$$

对 y,假设对任意 x 有

$$x+y=x\oplus y. \tag{5}$$

对 y',要证明对任意 x 有 $x+y'=x\oplus y'$. 事实上,对任意 x 都有

$$\begin{aligned} x+y' &= (x+y)' & &(\text{由}(2)) \\ &= (x\oplus y)' & &(\text{由归纳假设}(5)) \\ &= x\oplus y'. & &(\text{由}(4)) \end{aligned}$$

至此,归纳证明完成. □

规定

$$1=0',\ 2=1',\ 3=2',\ \cdots.$$

那么有

$$1+1=1+0'=(1+0)'=1'=2.$$

定理 5　1°　$0+y=y$.

　　2°　$x'+y=(x+y)'$.

证　1°　对 y 归纳.

$y=0$ 时,　$0+0=0$.　(用性质(*))

设 $0+y=y$,则

$$0+y'=(0+y)'=y'.$$

(前式用性质(*),后式用归纳假设.)归纳完成.

2°　对 y 归纳.

$$x'+0=x'=(x+0)'.\ (\text{两次用性质}(*).)$$

设 $x'+y=(x+y)'$,则

$$x'+y'=(x'+y)'=((x+y)')'=(x+y')'.$$

(中间等式用归纳假设,首尾等式用性质(*).) □

定理 6(加法交换律)　$x+y=y+x$.

证　对 x 归纳.

$x=0$ 时,　$0+y=y=y+0$. (前式为定理 5(1°),后式用性质(*).)

设 $x+y=y+x$,则

$$x'+y=(x+y)'=(y+x)'=y+x'.$$

(前式为定理 5(2°),中式用归纳假设,后式用性质(*).) □

定理 7(加法结合律) $(x+y)+z=x+(y+z)$.

证略. 对 z 归纳.

定理 8(消去律) 若 $x+y=x+z$,则 $y=z$.

(反设 $y\neq z$,对 x 归纳证明 $x+y\neq x+z$.)

定义 2 自然数乘法,用·表示,指具有下面性质的运算:

$$\begin{cases} x\cdot 0=0, \\ x\cdot y'=x\cdot y+x. \end{cases}$$

定理 9 定义 2 中乘法的定义是合理的:可以惟一地实现.

定理 9 的证明类似于定理 3 和定理 4. 为证明定义 2 中乘法的存在性,要对 x 归纳证明全称命题:对任意 x,可对任意 y 规定 $x\cdot y$ 使之具有定义 2 中所要求的性质.

定理 10 1° $0\cdot y=0$,

2° $x'\cdot y=x\cdot y+y$.(对 y 归纳.)

定理 11(乘法交换律) $x\cdot y=y\cdot x$.(对 x 归纳.)

定理 12(分配律) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.(对 z 归纳.)

定理 13(乘法结合律) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.(对 z 归纳.)

下面建立自然数的序的概念.

定义 3(自然数的序) x 小于或等于 y(或说 y 大于或等于 x),用 $x\leqslant y$(或 $y\geqslant x$)表示,指存在 u 使 $x+u=y$.

x 小于 y(或说 y 大于 x),用 $x<y$(或 $x>y$)表示,指 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$,即存在 $u\neq 0$ 使 $x+u=y$.

定理 14(反自反性) $x\not< x$.

证 反设 $x<x$,则 $x\leqslant x$ 且 $x\neq x$,这与 $x=x$ 矛盾. □

定理 15(可递性) 若 $x<y$ 且 $y<z$,则 $x<z$.

证 由已知,有 $u\neq 0$, $v\neq 0$ 使 $x+u=y$, $y+v=z$. 由定理 2,可设 $v=t'$. 于是

$$x+(u+v)=(x+u)+v=y+v=z,$$

$$u+v=u+t'=(u+t)'\neq 0 \quad (\text{用了 PA3}).$$

至此得 $x<z$. □

定理 16(可比性) $x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 二者必居其一.

证 对 x 归纳.

$x=0$ 时,$0\leqslant y$(因 $0+y=y$).

设 x 与任何 y 都可比: $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$.

当 $y \leqslant x$ 时,设 $y+u=x$,则 $y+u'=(y+u)'=x'$,这说明 $y \leqslant x'$.

当 $x \leqslant y$ 时,设 $x+u=y$. 此时有以下两种情形.

情形 1,若 $u=0$,即 $x=y$,则 $x'=y'=(y+0)'=y+0'$,此时 $y \leqslant x'$.

情形 2,若 $u \neq 0$,由定理 2,可设 $u=v'$. 于是 $x+v'=y$,且

$$x'+v=(x+v)'=x+v'=y\text{,此时 } x' \leqslant y.$$

总之,x' 也与任何 y 都可比:$x' \leqslant y$ 或 $y \leqslant x'$. 归纳完成. □

由定理 16 立即可得定理 17.

定理 17(三分律) $x<y$,$x=y$ 与 $y<x$ 三者必居其一.

定理 18 若 $x<y$,则 $x' \leqslant y$.

证 设 $x+u=y$ 且 $u \neq 0$. 则有 v 使 $u=v'$(由定理 2). 于是

$$x'+v=(x+v)'=x+v'=x+u=y.$$

这说明 $x' \leqslant y$. □

定理 19($\mathbf{N}$ 的良序性) 设 $L \subset \mathbf{N}$,$L \neq \varnothing$,则 L 必有最小数.

证 作 $M=\{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ 是 } L \text{ 的下界}\}$. ($x$ 是 L 的下界,指 x 小于或等于 L 中的每个数.) 下面证明 $M \cap L \neq \varnothing$. 反设 $M \cap L=\varnothing$. 有以下推理:

1° $0 \in M$. (0 当然是 L 的下界.)

2° 设 $x \in M$, 即设 x 是 L 的下界. 因 $M \cap L=\varnothing$,故 $x \notin L$. 于是 x 小于 L 中每个数. 由定理 18 即知 x' 也是 L 的下界,故 $x' \in M$.

由 1°与 2°用 PA5 得 $M=\mathbf{N}$, 这与 $M \cap L=\varnothing$ 而 $L \neq \varnothing$ 矛盾. 既然 $M \cap L \neq \varnothing$,$M$ 与 L 的公共元素即为 L 的最小数. □

读者不妨先自己用定理 19 试证下面的定理 20,因为证明本身和定理 19,20 都重要 .

定理 20(强归纳法或第二归纳法) 设关于自然数的命题 $p(n)$ 满足条件:

1° $p(0)$成立,

2° 若 $k<m$ 时 $p(k)$都成立,则 $p(m)$也成立,

那么对所有 n,$p(n)$都成立.

证 令 $A=\{n \in \mathbf{N} \mid p(n) \text{ 不成立}\}$. 只用证 $A=\varnothing$ 便可.

反设 $A \neq \varnothing$,则 A 有最小数,设为 m. (根据定理 19.) 于是:

(1) $p(m)$不成立(因 $m \in A$),

(2) $k<m$ 时 $p(k)$都成立(因 m 是 A 的最小数).

(1)和(2)合起来与已知条件 2°矛盾. □

思考题 3 定理 20 的证明过程中是否用到已知条件 1°?

§1.3 ZFC集论

分析的算术化,使古典数学建筑在很小的基底——皮亚诺算术之上. 这是数学基础史上继古希腊建立了欧几里得几何之后的第二个里程碑. 但是,人类数学的理性思维并没有就此停下脚步. 人们继而把眼光移向数学的更深的逻辑基础. 这时,新的矛盾接踵而来. 开初仅由少数人燃起的星星之火,迅速燎原,形成了20世纪初叶规模空前且影响深远的关于数学基础的学术运动,取得了一批划时代的数学成就. 成就之一,便是以ZFC公理系统为代表的集论的形成,该理论成了现代数学主体的基础. 这样,数学基础史上又很快树起了新的里程碑.

1.3.1 康托尔集论与集论诞生时期的风暴

集合这一术语,数学中古已有之. 集与类、族、组、系等用语类似,原是作为日常用语进入数学的. 特别的是,数学中常要碰到由无限多个对象构成的集合. 很早就有人发现,涉及无限对象的集,会有与人们的常识相悖的事情发生. 例如,同心的大圆与小圆二者周长不等但含有"同样多个"点(由圆心发出的射线建立了二圆间的一一对应). 意大利物理学家伽利略(G.Galilei, 1564～1642)曾在对无限进行思考的过程中对下面的事情感到困惑:正整数与平方数一样多. 困惑不解,但又因袭传统,人们一直都回避对无限集的明确承认.

分析数学是集论的摇篮. 在分析数学大发展时期,特别是在分析算术化的进程中,各种无限数集与点集逐渐被越来越多的学者大量研究. 在他们之中,相比之下,康托尔的研究最为全面,最为深刻,最为彻底. 是康托尔,把集的一般概念从数集、点集及其他具体的集中抽象出来,创建了以实无限为研究对象的集论.

康托尔1845年出生于俄国圣彼得堡的一个丹麦—犹太血统家庭,1856年随双亲迁到德国. 求学时,他因受魏尔斯特拉斯的影响从学工转学数学. 1869年起长期任教于哈雷大学.

最初,是古典分析中三角级数的精巧理论吸引了康托尔. 他在关于三角级数表示式惟一性的研究中精雕细琢,结果被一步步引上了研究无限集的道路. 用他自己的话说,是要"把无穷的各种关系弄得完全明朗"[32].

康托尔关于集论的文章1872年开始发表,1895及1897年的著作作了总结. 在这些著述中,他的成果主要有:

(1) 通过一一对应关系建立了集之间等势的概念及基数概念,奠定了无限集分类的基础.

(2) 引进了可数集的概念,证明了有理数全体及代数数全体都是可数集.

(3) 运用对角线方法证明实数集是不可数集,从而间接推导出超越数比代数数多,同时也说明了无限集可按大小区分为不同的类.

(4) 证明了 n 维空间与一维直线之间存在一一对应.

(5) 系统研究了序数理论,提出了良序原理.

(6) 证明了集的幂集(原集所有子集的集)比原集有更大的基数.

(7) 提出了连续统假设.(康托尔猜想:实数集的任一无限子集,若不与自然数集等势,便与实数集等势.)

康托尔关于无限集和超限数的革命性著述遭到了强大反对. 对此,他本人事先十分清楚. 他曾说:"我很了解,这样做,正使自己对立于广泛流传的关于数学无穷的观点,也使自己对立于目前流行的关于数的性质的意见. "[33]很明显,他是怀着极大勇气公开向传统观念挑战的. 他旗帜鲜明地把实无限作为自己的研究对象,这与传统格格不入. 由于当时绝大多数数学家都还是潜无限论者,所以康托尔的理论不遭到反对反倒是奇怪的."多少年里康托尔的名字就意味着论战和对立. "[34]有人攻击他的工作是"违背常识"的,是"唯心主义者的虚构"[35].

反对声中,最强烈的来自他的老师——时任柏林大学教授的克罗内克. 他站在有限论立场上,对康托尔发出猛烈粗暴的公开攻击,长达 10 年之久,甚至称康托尔的集论是骗人的鬼话,并坚决反对他在柏林大学任教. 面对强大的传统习惯势力与繁重的工作、生活压力,康托尔曾一度精神崩溃(后又暂时恢复)[36~39].

对这一历史场面,美国数学家丹齐克(T. Dantzig)曾评论道[40]:

康托尔的深思熟虑已经使他充分坚强,足以应付这场恶战,因为在未来多年的时间内,他必须孤军战斗. 这是一个什么样的战斗啊! 在数学史上从来也没有记录过如此激烈的场面. 集合论诞生时所遇到的风暴,表明了人类的激情即令在数学这样抽象的领域里,也是不能完全消泯干净的.

孤军艰苦奋战的康托尔坚信,他的工作经过一段时间,将被认为是"简单的,合适的并且是自然的"[41]. 他认为:"数学的本质恰恰在于它的自由. "[42]他曾用实际的或历史上的例子说明实无限进入数学是不可避免的,例如:无理数的定义必须以实无限为基础;一切正整数,圆周上的一切点,都是实无限的例证;承认潜无限,就意味着必然先要承认一个固定的实无限,把它作为潜无限这个变量取无限多个值的值域. 关于实无限,他曾于 1883 年说:"我是经过

多年科学上的努力和研究,几乎违背我的意愿……,逻辑地被迫承认的."[43]

康托尔在1885年的一封信中列举了历史上传统的对实无限的种种反对意见之后,深刻指出,一切关于"实无限不可能"的所谓证明都是错误的,原因在于[43]:

……这些证明一开始就期望那些数要具有有穷数的一切性质,或者甚至于把有穷数的性质强加于无穷.可是相反,这些无穷数,如果它们能够以任何形式被理解的话,倒是由于它们和有穷数的对立,它们必须具有完全新的数量特征,这些性质完全依赖于事物的本性,……而并非来自我们的主观任意性或我们的偏见.

康托尔终生不渝地捍卫着自己的思想和理论.此外,在生命的最后岁月,他还倾心于连续统假设的证明.1918年他在哈雷精神病院去世.

集论诞生时的风暴终究过去.历史选择了集论.无须长久等待,集论很快被数学家应用,先用于分析、测度论及拓扑,随即爆炸似地进入几乎所有的数学分支.集论进一步的发展深刻改变了数学的面貌,整个数学渐渐呈现出在新的基础上形成的更高的统一性:20世纪里,"集论数学"几乎涵盖了全部数学.

下面摘录几位数学家对集论的评价.

这对我来说是最值得钦佩的数学理智之花,也是在纯粹理性范畴中人类活动所取得的最高成就之一.

没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中驱逐出去.

——希尔伯特[44]

解决了先前围绕着数学无限的难题可能是我们这个时代值得夸耀的最伟大的工作.

——罗素(B. Russell)[44]

由康托尔的工作所带来的哲学革命也许甚至比数学本身还要伟大.

——约代因(E. B. Jourdain)[45]

康托尔的不朽功绩,在他敢于向无穷大冒险迈进,他对似是而非之论、流行的成见、哲学的教条、以及最大数学家的信念作了内外的斗争,由此使他成为一门新学科的创造者,这门学科已在今日成了全部数学的基础.

——柯尔莫戈洛夫(A. H. Колмогоров)[46]

1.3.1 附　康托尔辩辞录：数学的自由与制约

数学在其发展中是完全自由的，它只受下述自明的关注所制约，即它的概念既要内在地不存在矛盾，还要参予确定与此前形成的、已经存在着的和已被证明的概念之关系(藉助定义贯串起来). 特别地，在引入新数时，数学只遵循：在给出它们的定义时使之具有某种确定性，并且在某些情况下，使之与老数有某种关系，在特定的场合中这种关系一定会使它们(新数和老数)互相区别开来. 只要一个数满足这些条件，数学只能而且必须把它看作是存在的和实在的东西. 这正是我……关于为什么必须把有理数、无理数和复数看作与有限正整数一样是实在的所建议的理由.

我相信，没有必要害怕，许多人是害怕，这些原则含有对于科学的危险. 一方面，实行造出新数的自由必须服从所设计的条件，但这些条件给任意性留下的活动空间是非常小的. 而且，每一数学概念在其自身之中也带有必要的矫正物；如果它没有收获也不合适(它的无用很快就会表明这一点)，那么它将由于没有成功而被丢弃. 另一方面，在我看来，对于数学研究工作的任何多余的限制只会随之而带来更大的危险，由于实际上并没有任何理由可说明它是由科学的本质推断出来的，它的危险就更大了，而数学的本质恰恰在于它的自由.

如果高斯、柯西、阿贝耳、雅可比、狄利克雷、魏尔斯特拉斯、埃尔米特和黎曼总是被束缚而拿他们的新想法去臣服于形而上学的控制，那么，我们今日就不可能为现代函数论的雄伟建筑而高兴，现代函数论的设计和矗立是完全自由的，毫无短视的瞬间目的……如果福克斯、庞加莱和其他许多杰出的智者被外来影响所包围和限制，我们就会见不到他们带给微分方程论的巨大的推动，还有，如果枯莫尔不是斗胆地(大有仿效者)把所谓的“理想”数引入数论，我们今天也无从去羡慕钦佩克罗内克和戴德金在代数和算术上的十分重要和杰出的工作.

因此，如已说明的，数学是要脱离形而上学的桎梏而完全自由地发展……

录自康托尔：《一般集合论基础》，1883[47]（辩辞标题为录者所加.）

1.3.2　集论悖论与基础危机

分析的算术化完成之后，人们欣喜地认为，数学已经有了可靠的基础. 在1900年的国际数学家大会上，法国数学家、物理学家庞加莱(J.H.Poincare,

1854～1912)断言:“今天分析领域中只剩下了整数及整数的有穷和无穷系统,它们由相等或不相等的关系网连结着.”他进而说:“今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了!”[48]

庞加莱的语音刚落,歌舞升平的数学王国在它的基础部分骤起一场新的风暴,问题出在当时已被人们渐渐接受但仍存有争议的集论.

什么是集? 按康托尔的说法,“把人们直观的或想象的一些确定的、可区分的对象汇总在一起成一整体,便是一个集.”[49]康托尔给出的这一朴素的集的概念未能避免出现混乱. 如果我们把若干集作为元素放在一起,那么可以形成另一个集. 试问:把所有的集汇总在一起成一整体,不也构成了一个集吗? 设这个集是 V,则 $V\in V$. 当然仅从这一点,表面上还看不出有什么矛盾. 1897 年,意大利数学家布拉里-弗蒂发现了最大序数悖论(后被称为 Burali-Forti 悖论). 这一悖论康托尔已于 1895 年发现并曾通知希尔伯特. 1899 年,康托尔又将他发现的最大基数悖论写信告诉了戴德金. 这些悖论并未立即引起人们的注意,它们涉及到集论比较专业的知识,似乎是由于技术上考虑不周而出点毛病而已.

1901 年,罗素在对“由所有集组成的集”进行深入思考之后,发现了下面有名的悖论. 设

$$b=\{\text{集 } a\mid a\notin a\}.$$

现问:是 $b\in b$,还是 $b\notin b$? 不论怎么回答都导致矛盾:

$b\in b\Rightarrow b\notin b$ (若 b 为 b 的成员,则 b 具有性质 $b\in\notin b$);

$b\notin b\Rightarrow b\in b$ (若 b 具有性质 $b\notin b$,则 $b\in b$).

罗素悖论的上述表述十分简单且明白无误,与在它前后陆续发现的其他一些悖论相比,涉及的概念既简单又根本,引起的震动也最大. 这一悖论点燃了导致数学基础新危机的导火索. (罗素本人后来给这个悖论一个通俗比喻:“理发师悖论”. 村里一位理发师称:他要给且只给村里所有那些不给自己理发的人理发. 现问理发师:给不给自己理发?)

罗素悖论出现后,戴德金立即推迟印发他的关于数与连续性的著作第 3 版. 弗雷格在 1902 年给罗素的回信中说:“你发现的悖论引起我极大的震惊,因为它动摇了我打算建立算术的基础.”同一年弗雷格在一份书稿的后记中写道:“在工作结束之后才发现那大厦的基础已经动摇,对于一个科学工作者来说,没有比这更为不幸的了.”[50]

罗素悖论为什么会引起震动? 这是因为形成该悖论所使用的方法,如用某条性质来定义某个集合等方法在数学中是很常用的,原被认为是毫无问题

的，现在也居然被发现有问题. 数学所依赖的基本思维方法竟然也有不可靠的，于是不安全的阴影又在数学中出现了.

罗素悖论本质上是逻辑的悖论，或者说它是一种逻辑数学悖论. "一个悖论如此直接地涉及到两门最精确的科学，而且还出现在如此基础的地方，这的确是从来没有过的事情. "[51]逻辑只有磨尖到一定程度，才可能发现自身的这种矛盾.

历史上出现过的几次基础危机都与无限、实数等概念有关，它们的最终解决是依赖于集论的. 所以说，数学基础的这次新危机事实上是以前各次危机的继续，其影响更深、更广.

下面是 20 世纪里对基础研究作出过杰出贡献的几位数学家对集论悖论与基础危机的评论[52].

罗素从康托尔的集合论所导致的悖论中剥去了一切数学上的技术性细节，从而揭示了这样一个惊人的事实，即我们的逻辑直觉(诸如关于真理、概念、存在、集合等这样一些概念的直觉)是自相矛盾的.

——哥德尔(K.Gödel)：《罗素的数理逻辑》

促使我们谈及第三次基础危机的，远远不只是悖论在集合论基础从而也就是在分析中的出现，而主要是由于以下的事实：在克服悖论的各种尝试中，揭示了许多在最基本的数学概念(诸如自然数的概念)和意见上的深刻的令人吃惊的分歧.

——弗兰克尔(A. A. Fraenkel)，巴·希勒尔(Y.BarHillel)：《集论基础》

必须承认，在这些悖论面前，我们目前所处的情况是不能长期忍受下去的. 人们试想：在数学这个号称可靠性和真理性的模范里，每一个人所学的、教的和应用的那些概念结构和推理方法竟会导致不合理的结果. 如果甚至于数学思考也失灵的话，那么应该到哪里去寻找可靠性和真理性呢?

——希尔伯特：《论无限》

1.3.3　数学可否归为逻辑?

由悖论研究引发的学术运动吸引了大批数学、逻辑与哲学界的知名学者参与. "数学巨人之间为关于数学基础的新数学方法而爆发了一场战争. "[53]激烈的争论中形成了三个主要学派：逻辑主义、直觉主义与形式主义.

逻辑主义主张：数学可以化为逻辑，是逻辑的一个分支. 他们认为可用纯逻辑概念定义出数学的原始概念，可由逻辑规则推演出全部数学，进而一举解决数学的可靠性问题.

逻辑主义的主要代表人物是德国数学家、逻辑学家弗雷格(G.Frege,

1848～1925)与英国哲学家、数学家、逻辑学家罗素(B.A.W.Russell, 1872～1970). 1910 年,罗素与英国哲学家、数学家怀德海(A.N.Whitehead, 1861～1947)合作完成了三卷本《数学原理》,系统总结了该学派的研究成果,其中有大量技术性工作以使数学"逻辑化". 后来他们又对该理论进行多次修改.

逻辑主义学派的目标是否达到了?

一般的回答是否定的. 虽然数学比其他科学更多地使用逻辑,且集论的相当一部分可化为逻辑,但数学实质内容不能全部化为逻辑. 数学与逻辑有共性,且相互交叉、相互渗透,但本质上是不同的学科. 逻辑研究人类思维的形式及其规律;数学则从量的角度观察整个世界,从量的方面研究现实世界的运动、变化与发展. 为使这种研究精确地进行,数学不能局限于有限,于是集论中就引入了一条不可缺少的无限公理(详见 §3.6). 逻辑主义也承认无限公理的必要性,但无限公理既不是任何纯形式思维的推论,也难以被当作是一条自明的逻辑公理. 无限公理的引进是数学观察世界的需要,它的合理性最终是由数学与现实世界的关系决定的.

如果说集论是逻辑与数学的交会处,那么可以说,从逻辑经集论走进数学,无限公理与数学归纳法属于数学,是数学的大门. 一般认为靠扩大逻辑的内涵来断言数学可全部划归逻辑是不合适的. 这种划归没有也不可能被数学界认可.

尽管逻辑主义自定的目标无法达到,但该学派对数学基础作出的贡献是巨大的. 这主要表现在以下几个方面.

(1) 该学派对集论的研究,特别是解决集论悖论的研究是卓有成效的. 他们的工作使人们认识了集论作为现代数学主体的基础的地位,且为 ZFC 等集论公理系统的建立奠定了基础.

(2) 弗雷格与罗素等人所做的艰巨细致的工作使形式逻辑实现了由传统逻辑到现代逻辑的转变,且使数理逻辑的基础理论(命题演算与谓词演算)走向成熟.

(3) 该学派的研究工作虽未能使数学完全逻辑化,却使人们对数学与逻辑的关系有了较清晰的认识,同时也使人们对数学的严格性及真理性等有关问题有了更深入的理解.

1.3.4 直觉主义简介

站在与逻辑主义相对立的另一极端的激进学派是直觉主义. 它的代表人物是荷兰数学家布劳威尔(L. E. J. Brouwer, 1881～1966). 稍后有德国数学家魏尔(C. H. H. Weyl, 1885～1955)及数学家海廷(A. Heyting)等加入. 更

早,克罗内克与庞加莱有类似主张,该学派认为,数学的可靠基础是心灵的直觉而不是逻辑;相反,逻辑倒要依靠数学,依靠自然数. 他们把批判的矛头主要指向传统逻辑的排中律(排中律指:每个命题与其否定二者必有一真),反对排中律在数学中的自由使用,认为将排中律用于无限集是产生悖论的原因. 他们提出的对排中律使用的限制导致分析数学中不少重要定理的证明都通不过. 例如,波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理(有界无限集必有极限点)的证明就要对无限集使用排中律. 该定理的证明中,设包含无限点集 E 的闭区间$[a,b]$的中点为 c,接着断言以下两种情形必居其一:或者左半区间$[a,c]$包含 E 中无限个点;或者$[a,c]$不包含 E 中无限个点(于是右半区间$[c,b]$必包含 E 中无限个点). 这一证明步骤使用了"二择一"的排中律,直觉主义者反对这样的证明步骤,他们认为,数学可靠性的惟一标准是直觉上的"可构造性";若要证明一个数学对象存在,必须依靠直觉经有限步骤把它构造出来才行. 波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理关于极限点存在性的证明是非构造性的,是靠排中律来完成证明的,所以在直觉主义看来是不可靠的,无效的. 直觉主义的口号是:"存在等于可构造."关于无限,直觉主义坚持潜无限,反对实无限. 另外,他们还反对使用选择公理(选择公理指:可以同时从非空集之族的每个成员集中选出一个代表元素作为函数值,定义出该集族上的一个"选择函数"),因为该公理断言存在的选择函数是非构造性的.

直觉主义的主张导致他们对古典数学的严厉审查批判,结果是相当部分古典数学要被抛弃. 按他们的标准重建的数学则支离破碎,且重建过程所用的方法过于复杂、十分笨拙. 事实上,古典分析数学作为一个整体已被人类实践证明是合理的. 对古典数学进行肢解并抛弃它的一部分,是行不通的. 关于排中律,正如希尔伯特所说:"禁止数学家使用排中律就像禁止天文学家使用望远镜及拳击家使用自己的拳头一样"[54]. 此外,直觉主义内部关于可构造性并没有统一的清晰认识. 上述种种原因使直觉主义的主张及他们对古典数学所作的严厉批判并没有被普遍接受. 甚至有些直觉主义者在自己的数学活动中也并不完全遵守该学派的苛刻要求. 前苏联数学家马林(Yu. I. Manin)曾说:"现在,大多数数学家不认为禁止无穷性、非构造性等有任何意义. ……我们需要的是探讨创造性思想的创造性方法,而不只是批判性的东西. "[55]

直觉主义于 20 世纪初刚出现时,并未引起人们的重视. 在激烈的争论中,人们才逐渐感觉到这个学派的份量. 尽管很少有人全盘接受他们的思想和主张,但大家越来越关注并重视该学派的研究成果. 主要原因如下.

(1) 关于某种数学对象存在性的一个定理,如果它有了一个非构造的证明之后,又能找到一个构造性证明,那无疑是值得欢迎的. 非构造性证明可能

简单明了;而构造性证明从应用角度往往更有效. 构造性数学的研究成果使人们有可能将数学各部分依可靠(或有效)程度区分为不同层次.

(2) 构造性研究与计算机理论中的能行性研究有关. 特别是"实际能行"的构造性数学研究对计算机科学有重要意义.

(3) 直觉主义的存在及其发展使人们看到,对于什么是数学上的"证明",并不存在一个大家完全一致的回答. 这并非坏事. 对证明的不同理解,推动了数学基础的深入研究. 在下面将要谈到的希尔伯特所规划的元数学中,直觉主义方法,如有限可构造模式等被认真地考虑并吸收.

(4) 直觉主义关于排中律的思考是一种思想解放,是对亚里士多德以来的传统逻辑的一次冲击. 这促进了逻辑走向多样化,在现代逻辑中,直觉主义逻辑占有重要的地位.

1.3.5 希尔伯特规划与哥德尔不完备性定理

解决数学基础问题的第三种方案是与逻辑主义、直觉主义的方案相对立,但又是在它们方案的基础之上形成的,这就是被称作形式主义的希尔伯特学派的规划. 它的基本思想是:试图用有限方法解决包含无限概念的古典数学的可靠性.

希尔伯特规划的形成有一个过程.

19世纪末,希尔伯特完成了把欧氏几何抽象地公理化的任务,并证明了欧氏几何相对于分析(实数理论)的无矛盾性(详见§1.2.5).

1900年,早在罗素悖论发现之前,希尔伯特在国际数学家大会上的著名问题表中就已经把算术理论无矛盾性问题作为第二个问题提出,并指出该问题对分析基础的重要性.

罗素悖论出现以后,希尔伯特认识到:"想要避免悖论,那就必须在某种程度上同时进行对逻辑和算术定律的研究."[56]1904年,他提出把数学证明本身作为数学研究对象,开始形成证明论思想. 此后十多年内,他以敏锐的眼光注视着逻辑主义与集论公理化等方面研究所取得的进展,这些进展为证明论的最终形成准备了条件,特别是在他面前已有了日渐成熟的符号逻辑体系.

作为对直觉主义向古典数学挑战的直接回答,希尔伯特在1922年汉堡的一次会议上提出了他的证明研究规划,被称作希尔伯特规划. 按此规划,先将具体的数学理论与所用到的逻辑同时公理化,并形成形式系统. 这种系统是一种形式语言,其中有一张选定的字母表(符号表),并规定了有效的语法规则,按规则能在有限步骤内机械地确定:

(1) 任一字母串是否是一个语句(公式);

(2) 任一语句是否是一条公理;

(3) 任一篇该系统的文章(语句串)是否是一篇证明文章.

有了数学形式系统之后,按规划接着对系统进行“元数学”研究(即把整个形式系统作为对象进行数学研究). 中心课题是要证明系统的无矛盾性:系统的任一语句及其否定二者不可能同时在该系统中可证. (后来还进一步提出要研究系统的完备性、可判定性等其他性质. 完备性指系统的任一语句及其否定二者不可能在该系统中都不可证,可判定性指存在有效方法可用来在有限步骤内确定任一语句是否在该系统中可证.)按规划,很重要的是在元数学的研究中严格坚持有限性,不涉及任何实无限方法(这可让所有直觉主义者接受),而实无限对象作为“理想元素”进入形式系统中.

上述希尔伯特规划展示了一项激动人心的事业,其目标是“一劳永逸地消除任何对数学基础可靠性的怀疑”[56]. 除了希尔伯特与德国数学家贝奈斯(P.I.Bernays,1888～1972),这项事业还吸引了一批青年数学家加入,如阿克曼(W.Ackermann,1896～1962)与冯·诺伊曼(J.L.von Neumann,1903～1957)等. 一段时间内,他们的工作进展顺利. 到了 1928 年,他们似乎已经证明了数论的无矛盾性,并且似乎离到达目的为期不远了. 当年,希尔伯特曾自信地断言:“利用这种新的数学基础——人们完全可以称之为证明理论,我将可以解决世界上所有的基础性问题. ”[57]希尔伯特不会想到他所规划的目标是达不到的.

1928 年 9 月 3 日,希尔伯特在波伦亚发表了关于数学基础的重要演说,在乐观地宣布(似乎已完成的)数论的无矛盾性证明之后,希尔伯特列出了亟待解决的四个问题[58]:

问题 1　分析基本部分的无矛盾性.

问题 2　把问题 1 推广到高于二阶函数项演算.

问题 3　数论与分析公理系统的完备性.

问题 4　逻辑规则系统(指一阶逻辑)的完备性.

非常值得人们尊敬和赞扬的希尔伯特,这位眼光深邃的伟大数学思想家,是他,把数学基础研究最核心的问题从混乱中分离出来,清楚明白地摆在人们面前.

这时,青年哥德尔(K.Gödel,1906～1978)出现了:他被希尔伯特引上了风口浪尖. 1929 年,23 岁的哥德尔证明了一阶逻辑的完备性,制服了希尔伯特的上述问题 4. 第二年,他接着冲击分析的无矛盾证明(即希尔伯特的上述问题 1). 开始,他是正面攻击. “令人惊讶,攻打问题 1 的一半居然就引导他相当轻松地制服了前三个问题,无一漏网,只是答案统统跟希尔伯特的期望相

反.……整个这项触目惊心的工作是在不到半年时间内做的”[58].

哥德尔的这项工作以他的不完备性定理著称于世. 这“是整个数理逻辑史中最伟大的单项工作”,也是 20 世纪最杰出的划时代的数学成就之一[58],[59]. 哥德尔的定理是他应用直观的算术真理概念与准确的形式可证性概念之间的辩证关系的一个宏伟结果. 这种辩证关系在他的发现过程中尤为明显. 他先是看出算术真理在算术中不可定义,随后又注意到形式系统中的可证性是可定义的,这才造出一个在系统中可表达但不可证的真命题. 用哥德尔自己的话说,

应当指出,我在数学形式系统中构造不可判定的数论命题的助探原理是高度超穷的“客观数学真理”概念……它同‘可证性’概念是对立的……又是运用这个超穷概念最终把我引向了用有穷主义手段可证的结果,例如关于一致形式系统中存在不可判定命题的那些一般定理[60].

哥德尔不完备性定理可简单地表述如下:形式算术的任一递归扩张如果是无矛盾的,那么第一,它是不完备的(即总有它不可判定语句);第二,它的无矛盾性在它内部不可证.(“递归”意味着存在算法可用来机械地确定该扩张系统的任一篇文章是否是一篇证明.)

定理第一部分的证明分很多层次(详见[59]第 3、4 章). 由于在所考察的系统中可证性是可定义的,哥德尔便发现可以构造出一个语句,该语句具有“自相关”的直观涵义:“我不可证”. 这个语句在该系统中的确是不可证的(否则便证出了一个假命题);既然不可证,该语句就是真的,从而它的否定就是假的,当然也不可证(注意系统假设是无矛盾的).

定理第二部分的证明更长、更繁(哥德尔本人当时只作了说明而并未作出证明),但直观上不难看到结论是对的. 若用 φ 表示那个“我不可证”语句,则在系统内,φ 与“φ 不可证”等价. 根据定理第一部分,若“系统无矛盾”,则“φ 不可证”. 站在系统内看这一点便可以看出:“系统无矛盾”在系统内不可证,否则在系统内便证明了“φ 不可证”,也就证出了 φ.(这一部分的完整证明是由希尔伯特与贝奈斯在 1939 年完成的.)

哥德尔的定理否定了希尔伯特规划的目标,从数学上证明了希尔伯特学派原来意义下的目标是达不到的. 想要证明一个形式数学系统的无矛盾性,采用的“元系统”一定要更加丰富才行. 这样一来,元系统的可靠性变得更难以确定. 我们看到,用纯数学方法一劳永逸地解决数学的可靠基础问题,不是人们所应追求的现实目标. 事实上,人们从此一般不再按照形式主义、逻辑主义或直觉主义的方案去论证数学的可靠性,而是更加面对现实,承认经人类实践考验过的全部古典数学,承认成功地避免了已知悖论的集论系统. 从这个

意义上说，哥德尔定理了结了三个学派之间的争论，或者说，使原来的一些争论失去了重要性. 在那短暂的时间内，人类数学思想经历了剧烈的变动. 冯·诺伊曼说："这发生在我们自身的时代，我惭愧地知道自己关于绝对的数学真理性看法，在这一时期是怎样容易地改变的，并且是怎样相继地改变了三次的. "[61]

希尔伯特规划虽然没有成功，但如我们见到的，它极大地推动了数学基础的深入研究，产生了像哥德尔不完备性定理这样的重大成就. 此外，规划创造了形式化的研究方法，使数学的公理方法发展到新阶段. 这种方法为数学的创造活动提供了更大的自由空间. 从许多具有相同数学结构的具体数学对象中抽象出一般性质，然后用形式语言表达出来，这样便可对形成的形式系统进行更高层次的数学研究——元数学研究. "可以这样来形容：如果说过去人们只是站在理论之内进行研究，那么现在已经超越于理论之外，或站在理论之上来考虑问题了. "[62]希尔伯特规划虽然无法实现，但"这个乌托邦却丰富了理论、概念和方法的宝库，所有这些都已被证明是特别有趣和富有成果的，而且，在将来更加会是这样"，"这是近代人类抽象思维的伟大成果之一"[62].

1.3.6 ZFC 集论脱颖而出

在 20 世纪初期的学术运动中，在三大基础学派之间的激烈争论中，一些数学家更直接地为集论本身寻找消除悖论的方案. 他们的具体目标是：建立集论的公理系统，既能保留康托尔朴素集论的所有成果，又能避开已知的悖论，同时，还易于被人们理解并接受.

在众多尝试建立的早期集论系统之中，一种系统脱颖而出，它就是由德国数学家策梅洛(E. Zermelo, 1871～1953)于 1908 年开始建立，后来由以色列数学家弗兰克尔(A. A. Fraenkel, 1891～1965)，挪威数学家斯科伦(T. Skolem, 1887～1963)与冯·诺伊曼等人于 20 世纪 20 年代加以改进的策梅洛-弗兰克尔公理集论系统，被人们简记作 ZF，加入选择公理(Axiom of Choice)，记作 ZFC.

集论悖论的出现表明，不加限制地使用集这个概念会出毛病. ZFC 系统的主要思想是：对集的规模加以限制，使之不能"过大". 这主要表现在一条被称作"内涵原则"的使用上. 按康托尔朴素集论的做法，为了定义或形成一个集，只要有一条叙述某种对象的特殊性质就可以了. 设 $\varphi(x)$ 是关于 x 的某个性质(例如 $x \notin x$)，以前人们便习惯地说 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 是个集. 在 ZFC 系统中，一般不承认 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 是集，但承认 $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ 是集，这里的 A 是一个已知的集. 这就是说，一般要求限制在一个给定集的内部使用内涵原则.

这样一来,罗素悖论中的$\{x \mid x \notin x\}$现在就不被认为是集,于是罗素悖论(以及其他类似悖论)就可以避免了.

至今人们最常用的系统是 ZFC.(除了 ZFC,另一种常见的类似系统是 von Neumann-Bernays-Gödel 系统,简记为 NBG. 在 NBG 中,有集与类这两种不同的形式对象. 它们的区别是:集可以成为别的集或类的元素,但非集的类不行.)ZFC 融合了各个学派(特别是逻辑主义)具体方案中的思想与方法,是在当时的学术大环境下形成的,但 ZFC 本身并不附带鲜明的哲学观点. 作为一种具体的数学形式系统,ZFC 也逃脱不了 Gödel 不完备性定理所断言的局限. 但 ZFC 在以下两点表现出它的重要性:第一,在该系统内可演绎出古典数学(详见第三章);第二,更重要的是,它为数学的进一步发展提供了极广阔的空间. 可以说,现代数学的主体是在 ZFC 的基础上建立起来的.(这里说"主体"而不应说"全部". ZFC 并不完备. 它不能证明自己无矛盾,也不能用来判定例如连续统假设这样熟悉的基本命题,且这样的例子已越来越多.)至于 ZFC 的无矛盾性问题,人们并不认为是个紧迫问题. 并非很多数学家"认真地相信该公理系统中还有矛盾的危险."[63]越来越多的人相信,数学悖论对数学的发展并非坏事.

ZFC 是开放的:它能容纳形形色色的可变的相对无矛盾延伸,从而具有很强的生命力.

本书往下的主要目的是介绍数学基础的现状,主要内容是介绍从 ZFC 基底走上数学主体的一段过程.

§ 1.4 本章小结

数学基础是研究什么的? 按较窄的意义理解,数学基础研究数学的主体是在哪些基本概念与基本事实之上用何种方式建立起来的.

人类数学大体上经历了三个大的发展阶段,那就是:以几何数学为主体的初等数学阶段,以分析数学为主体的古典数学阶段和以集论数学为主体的现代数学阶段. 这三个阶段都有相应的关于数学基础的研究,都形成了相应于自己主体的基础,一个比一个更加深厚,它们是:欧几里得几何,皮亚诺算术与 ZFC 集论,其中最后一个基础现仍处在变动发展之中. 各个阶段关于数学基础的研究有一个共同点:都与某种形式的悖论的出现有关. 悖论出现给人们带来困扰和危机感,解决悖论的要求推动了数学基础的深入研究,数学史上出现的各种悖论的背后,站着数学的一个基本矛盾——有限与无限的矛盾. 悖论的解决使人们对数学中无限的认识提高到新水平,历史经验使人们会以更

成熟的心态面对将来可能出现的新的数学悖论.

悖论问题不是人们研究数学基础的惟一动因. "即使在集合论中没有发现悖论,关于为集合论建立基础理论的问题也必然会得到提出和讨论. "[64]为数学寻找基础的主要动力来自数学的本质. 为了从量的方面精确观察世界,数学活动需要主动去寻找可靠的立足点.

关于数学基础的越深层的研究成果,影响面也越大. 其中一些重大成果惠及整个数学,甚至超出数学范围,对人类科学与科学思想乃至整个人类社会产生了重要影响. 这只用看下面的例子就够了:深源于数学基础研究的哥德尔不完备性定理成了计算机科学理论的基石. 美籍逻辑学家、计算机理论家、哲学家王浩(H. Wang,1921～1995)曾说:"哥德尔的工作与计算机的联系可能要比爱因斯坦的工作与原子弹的联系密切一点",尽管"哥德尔本人对计算机的发展毫无兴趣. "[65]

第二章　逻辑准备

数学中一般使用的逻辑是标准的二值逻辑,它只有真与假两个真值. 本章先介绍命题演算,这是最简单的一种逻辑形式系统. 在这基础上,介绍谓词演算(也称一阶逻辑),这种逻辑形式系统是常见的各种数学形式系统(包括ZFC)的一般框架. 数理逻辑所提供的形式化的方法对数学研究,特别是对数学思维方式产生了重要影响.

本章的目的是:力求简单精练地介绍所必需的最基础的数理逻辑知识. 本章可先粗略读过,不必在细节上用太多时间.

§2.1　命题演算初步

在命题演算这个形式系统中,用来表示简单命题的命题变元是不能再分解的最小单位. 由命题变元利用命题连接词所形成的一般公式表示复合命题. 我们要研究如何由简单命题的真假来决定复合命题的真假.

2.1.1　命题连接词

命题演算形式系统可以看成一种形式语言,字母表:

$x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots$(命题变元);

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$　(命题连接词);

(,)　(左、右小括号).

由以上字母(符号)按以下两条规则形成公式:

(1) 每个命题变元都是一个公式(叫做简单公式).

(2) 若 p 与 q 是公式,则 $\neg p, (p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q), (p \leftrightarrow q)$ 都是公式.

除了按上面两条规则形成的公式,系统中没有别的形式的公式.

公式 $(\neg x \rightarrow y)$ 可省去外层括号,写成 $\neg x \rightarrow y$,但公式 $\neg((\neg x \rightarrow y) \rightarrow z)$ 中括号则不能省去.

应用时,公式 p 所表示的命题为真,则说 p 的真值为1;公式 p 所表示的命题为假,则说 p 的真值为0. 本段中,用 $p, q, r, \cdots$ 等表示公式,应用时也简单地说它们表示该公式所代表的命题. 字母表中列出的5种命题连接词是常

用的．下面分别对它们作出解释．

一、否定词$\neg$

$\neg p$(读作非 p)表示"p 的否定"．否定词的真值表：

p	$\neg p$
1	0
0	1

这张表的解释是：p 为真当且仅当$\neg p$ 为假．

二、合取词$\wedge$

$p\wedge q$ 表示"p 与 q"．合取词$\wedge$的真值表：

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

上表的解释是：$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真．

三、析取词$\vee$

$p\vee q$ 表示"p 或 q"．析取词$\vee$的真值表：

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

上表的解释是：$p\vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 至少有一个为真(可以同时为真)．换句话说，当且仅当 p 与 q 二者同时为假时 $p\vee q$ 为假．

日常用语中，对"或"一词有可兼与不可兼两种理解．从析取词的真值表可以看出，析取词$\vee$所表示的"或"是"可兼或"．

四、蕴涵词$\rightarrow$

$p\rightarrow q$ 表示"如果 p，那么 p"．蕴涵词$\rightarrow$的真值表：

p	q	$p\rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

上表的解释是：$p\rightarrow q$ 为真当且仅当 p 为假或 q 为真．或者说，当且仅当 p 为

真而 q 为假时 $p\to q$ 为假. 这样规定的蕴涵式被称作"实质蕴涵式". $p\to q$ 中的 p 与 q 分别称作蕴涵式的前件与后件. 只要不是前件真而后件假,蕴涵式都为真. 这样的规定符合数学上的实际使用习惯. 例如我们说命题

$$\text{若 } a^2<1, \text{则 } a^2<8$$

是真命题,这是因为前件"$a^2<1$"为真而同时后件"$a^2<8$"为假的情形不会发生,而只会发生以下三种情形中的一种:

(1) $a^2<1$ 真,且 $a^2<8$ 真(如 $a=0$),

(2) $a^2<1$ 假,但 $a^2<8$ 真(如 $a=2$),

(3) $a^2<1$ 假,且 $a^2<8$ 假(如 $a=3$).

试想我们为 $p\to q$ 设计另一不同的真值表,肯定就不能表现上例中蕴涵的实际使用情况. 另外,$p\to q$ 与日常对"如果 p,那么 q"的理解有差别. 按日常理解,蕴涵式的前件与后件二者之间有某种意义上的联系,但在形式系统里不提这种要求,而是把具体实际内容撇在一边.

五、等价词$\leftrightarrow$

$p\leftrightarrow q$(读作"p 等价于 q")表示"p 当且仅当 q". 等价词$\leftrightarrow$的真值表:

p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

上表的解释是:$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同真假.

我们看到,每个命题连接词都联系着一个真值函数,函数值由相应的真值表的最后一列给出. 上面的五个连接词中,否定词的真值函数是一元的,其他是二元的. (每个连接词与它的真值函数常用同一符号表示,如常写 $\neg 0=1$, $\neg 1=0, 1\wedge 1=1, 1\wedge 0=0,\cdots$)五个连接词中,$\neg$与$\wedge$这两个其实就够用了,因为另外三个可以用$\neg$与$\wedge$"等价表示"出来:

$$(p\vee q)\leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q),$$

$$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q),$$

$$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\to q)\wedge(q\to p)).$$

详细的讨论见 2.1.4.

练习1 一元真值函数有多少个? 二元真值函数有多少个? 其中哪一个二元真值函数对应于"不可兼或"? 试写出它的真值表. ("不可兼或"用符号 $\overline{\vee}$ 表示.)

练习 2 (1) 用$\neg$与$\vee$"等价表示"出$\wedge$,$\to$与$\leftrightarrow$.

(2)用$\neg$与$\rightarrow$“等价表示”出$\wedge$，$\vee$与$\leftrightarrow$.

2.1.2　真值表与永真式

计算公式真假值的一种方法是列真值表．用这种方法，复合命题的真假可由支命题的真假通过计算来确定．下面用例子说明真值表的列法．

例 1　公式$(p \vee q) \rightarrow p$的真值表．

首先在p与q的下方写出所有可能的真值组合(共 4 种：1,1；1,0；0,1；0,0)．然后按公式中运算的次序(先$\vee$，后$\rightarrow$)进行计算，将每次运算所得的真值写在该运算符下．最后得到的一列结果(写在最后一个运算符号下)用竖线标出．

$(p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	p
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

从上表中看到，在对p,q的四种不同的真值指派中，使$p \vee q \rightarrow p$取真值 1 的叫做该公式的成真指派，它们是(1,1)，(1,0)，(0,0)．该公式的成假指派只有(0,1)．

例 2　公式$((p \rightarrow q) \wedge \neg(q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$的真值表．

首先在p,q,r下方写出各种真值组合(共 8 种)，然后依次进行七次运算，并用竖线标出最后一列：

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\rightarrow$	$((p$	$\vee$	$q)$	$\vee$	$r)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

从上表中看到，该公式的成假指派是(0,0,0)，其余七种是成真指派．

下面三个真值表都只差一步而未最后完成，请读者尝试写出所缺的最后一列．

p	$\to$	$(q$	$\to$	$p)$
1		1	1	1
1		0	1	1
0		1	0	0
0		0	1	0

$(\neg$	p	$\to$	$\neg$	$q)$	$\to$	$(q$	$\to$	$p)$
0	1	1	0	1		1	1	1
0	1	1	1	0		0	1	1
1	0	0	0	1		1	0	0
1	0	1	1	0		0	1	0

$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r)$	$\to$	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r))$
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0		1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1		1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0		1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1		0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0		0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1		0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0		0	1	0	1	0	1	0

当我们完成上面各表最后一次运算时，就会发现最后一列全是 1. 这说明，对 p,q 的任何真值指派都是上面前两个公式的成真指派；对 p,q,r 的任何真值指派都是上面第三个公式的成真指派. 也就是说，不管 p,q,r 取何真值，以下三个公式总为真：

$$p\to(q\to p), \qquad \text{(肯定后件律)}$$

$$(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r)), \qquad \text{(蕴涵词分配律)}$$

$$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p). \qquad \text{(换位律)}$$

我们把上面这类公式叫做永真式或重言式(tautology).

以下是一些常见的且容易观察或计算出来的永真式：

$$p\to p, \qquad \text{(同一律)}$$

$$\neg p\vee p, \qquad \text{(排中律)}$$

$$\neg(\neg p\wedge p), \qquad \text{(矛盾律)}$$

$\neg\neg p \leftrightarrow p$,　　（双重否定律）

$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$,　　（析取交换律）

$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$,　　（合取交换律）

$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$,　　（析取结合律）

$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$,　　（合取结合律）

$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,　　（分配律）

$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,　　（分配律）

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,　　（De Morgan 律）

$\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$,　　（否定前件律）

$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$,　　（否定肯定律）

$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$,　　（假设三段论）

以上永真式可选择一些加以验证.

列真值表的算法虽然并不复杂,但当命题变元比较多时,计算量比较大.例如,下面的公式

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_5 \wedge p_6)) \wedge ((p_3 \wedge p_4) \rightarrow p_7) \wedge ((p_6 \wedge p_7) \rightarrow p_8)) \rightarrow p_8$$

可以验证是个永真式(见 2.1.3 例 2),但完整写出真值表,要进行 $2^8 = 256$ 行计算. 好在这项工作可以交给机器去做,从理论上说,这项工作总可以让机器去做. 不过当命题变元数目多到一定程度时,连高速计算机也无法胜任这种工作了.

练习1　*列出下列公式的真值表. 哪些公式是永真式?*

(1)$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$,

(2)$((p \vee q) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge q))) \rightarrow (\neg p \vee q)$,

(3)$(((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((p \vee q) \rightarrow \neg r)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$,

(4)$(p \wedge q) \rightarrow p$,

(5)$(q \vee r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$,

(6)$(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$,

(7)$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$.

2.1.3　真值方程组,应用举例

用真值表来判定任一公式是否是永真式,理论上总是可行的,但实际上当命题变元比较多时,计算量很大,这时可考虑灵活采用其他一些特殊方法,解真值方程组是方法之一.

本小节为简单计，常把公式与其真值等同起来，如写 $p=1, q=0, p\to r=1$ 等.

例 1 $((p\to q)\to p)\to p$ 是永真式吗?

问题可化为检查下面的真值方程组

$$\begin{cases}(p\to q)\to p=1, & (1)\\ p=0 & (2)\end{cases}$$

是否有解. 如果无解，说明原公式是永真式，否则就不是.

将(2)代入(1)，得

$$p\to q=0, \qquad (3)$$

因 $p=0$，不管 $q=0$ 或 $q=1$，(3)皆不成立，故原方程组无解. 这说明公式

$$((p\to q)\to p)\to p \qquad \text{(Peirce 律)}$$

是永真式.

例 2 证明下面的公式

$$(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge p_4\wedge((p_1\wedge p_2)\to(p_5\wedge p_6))\wedge((p_3\wedge p_4)\to p_7)\wedge ((p_6\wedge p_7)\to p_8))\to p_8$$

是永真式.

列出方程组

$$\begin{cases}p_1=p_2=p_3=p_4=1, & (1)\\ (p_1\wedge p_2)\to(p_5\wedge p_6)=1, & (2)\\ (p_3\wedge p_4)\to p_7=1, & (3)\\ (p_6\wedge p_7)\to p_8=1, & (4)\\ p_8=0. & (5)\end{cases}$$

只用证方程组(1)～(5)无解便可.

由(4)，(5)得

$$p_6\wedge p_7=0, \qquad (6)$$

由(1)，(2)得

$$p_5\wedge p_6=1, \qquad (7)$$

由(1)，(3)得

$$p_7=1, \qquad (8)$$

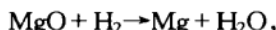
由(6)，(8)得

$$p_6=0. \qquad (9)$$

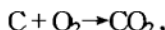
(7)与(9)矛盾，这说明该方程组无解，从而证明原公式是永真式.

不难看出例 2 中公式的永真性给出了下面的化学问题的肯定回答.

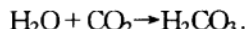
“现有 MgO, H_2, C, O_2 四种化学物质，且已知



$$MgO + H_2 \to Mg + H_2O,$$



$$C + O_2 \to CO_2,$$



$$H_2O + CO_2 \to H_2CO_3.$$

问：能否用现有物质制造出 H_2CO_3（碳酸）？”

例 3　设已知

1°　a_1 为奇数或 a_2 为偶数，

2°　a_1 若为偶数，则 a_3 与 a_4 皆为偶数，

3°　a_4 若为偶数，则 a_2 也为偶数.

现问，能否由以上三个已知条件推出结论：a_2 与 a_3 至少有一个为偶数？

为了回答这个问题，用 p_i 表示“a_i 为偶数”，$i=1,2,3,4$；那么问题变为判断公式

$$((\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \to (p_3 \wedge p_4)) \wedge (p_4 \to p_2)) \to (p_2 \vee p_3)$$

是否是永真式. 现考察真值方程组

$$\begin{cases} \neg p_1 \vee p_2 = 1, & (1) \\ p_1 \to (p_3 \wedge p_4) = 1, & (2) \\ p_4 \to p_2 = 1, & (3) \\ p_2 \vee p_3 = 0. & (4) \end{cases}$$

是否有解. 由(4)得

$$p_2 = p_3 = 0, \tag{5}$$

由(3)与(5)得

$$p_4 = 0, \tag{6}$$

由(1)与(5)得 $\neg p_1 = 1$ 即

$$p_1 = 0. \tag{7}$$

将(5),(6)与(7)代入(2)的左边，得

$$p_1 \to (p_3 \wedge p_4) = 0 \to (0 \wedge 0) = 1.$$

所得结果说明 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ 是方程组的解，所以题中推理不能成立.

例 4　一案涉嫌 A_1, A_2, A_3, A_4 四人. 根据已有线索，已知：

1°　若 A_1 与 A_2 均未作案，则 A_3 与 A_4 也均未作案；

2°　若 A_3 与 A_4 均未作案，则 A_1 与 A_2 也均未作案；

3°　若 A_1 与 A_2 同时作案，则 A_3 与 A_4 有一人且只有一人作案；

4°　若 A_2 与 A_3 同时作案，则 A_1 与 A_4 同时作案或同未作案.

办案人员由此得出结论：A_1 是作案者. 这个结论正确吗？

解 用 p_i 表示"A_i 作案"，$i=1,2,3,4$. 考察公式
$(((\neg p_1 \wedge \neg p_2) \leftrightarrow (\neg p_3 \wedge \neg p_4)) \wedge ((p_1 \wedge p_2) \to ((p_3 \vee p_4) \wedge \neg(p_3 \wedge p_4))) \wedge ((p_2 \wedge p_3) \to ((p_1 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4)))) \to p_1$.
为判断它是否是永真式，列出真值方程组

$$\begin{cases}(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \leftrightarrow (\neg p_3 \wedge \neg p_4) = 1, & (1)\\ (p_1 \wedge p_2) \to ((p_3 \vee p_4) \wedge \neg(p_3 \wedge p_4)) = 1, & (2)\\ (p_2 \wedge p_3) \to ((p_1 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4)) = 1, & (3)\\ p_1 = 0. & (4)\end{cases}$$

$p_1=0$ 时，(2)自动成立，不管 p_2,p_3,p_4 取何值. 试取 $p_2=1$，若 $p_3=0$，则(3)也自动成立. 把这几个数据代入(1)，得

$$0 \leftrightarrow (1 \wedge \neg p_4) = 1,$$

此式当 $p_4=1$ 时是成立的，于是得到方程组的一个解：$p_1=p_3=0$，$p_2=p_4=1$. 这说明，没有理由断言 A_1 是作案者.

练习1 判断以下公式是否是永真式(方法不限).

(1) $(\neg(p \to q)) \to (q \to p)$.

(2) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

(3) $p \to ((\neg p \vee q)$.

(4) $((p \vee q) \wedge (p \to q)) \to (q \to p)$.

(5) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

(6) $((p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)) \leftrightarrow (p \to q)$.

(7) $((p \wedge q) \to (r \wedge \neg r)) \leftrightarrow (p \to \neg q)$.

(8) $((p \to q) \wedge (q \to p)) \leftrightarrow (p \vee q)$.

(9) $((p \vee q) \to (p \to \neg q)) \to (\neg p \vee q)$.

(10) $((p \to q) \wedge (r \to q) \wedge (s \to q)) \to ((p \wedge r \wedge \neg s) \to q)$.

(11) $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \to (((p \to q) \vee (p \to r)) \wedge ((q \to p) \vee (q \to s)))$.

练习2 例4中如果办案人员作出的判断是："A_1,A_2,A_3 三人中至少有一个未作案"，判断是否正确？

练习3 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为4个事件，已知：A_1 与 A_2 不同时发生；若 A_1 发生，则 A_3 不发生而 A_4 发生；若 A_4 发生，则 A_2 不发生. 根据这些作出判断：A_2 与 A_3 不同时发生. 此判断是否合理？

练习4 研究形为

$$(\cdots(((p \underbrace{\to p) \to p) \to p) \cdots) \to}_{\text{有}n\text{个}\to} p$$

的公式. n 取何值时此公式是永真式?

*2.1.4　命题连接词的完全组

真值函数是指自变量与因变量的值都取 0 或 1 的函数,也称真值运算. 本小节中,我们把命题连接词等同于各自相应的真值函数. 例如,把$\neg$当作一个一元真值函数:

$$\neg 0=1,\quad \neg 1=0.$$

又如,把$\rightarrow$当作一个二元真值函数:

$$1\rightarrow 1=1,\quad 1\rightarrow 0=0,\quad 0\rightarrow 1=1,\quad 0\rightarrow 0=1.$$

容易验证以下公式成立:

公式 1°　$\neg\neg x=x$.　　($x\in\{0,1\}$,以下同.)

公式 2°　$1\rightarrow x=x$.

公式 3°　$x\rightarrow 1=1$.

公式 4°　$x\rightarrow 0=\neg x$.

公式 5°　$0\rightarrow x=1$.

下面当我们说 n 元真值函数 f 可由一元函数$\neg$和二元函数$\rightarrow$表示出来,意思是说函数值 $f(x_1,\cdots,x_n)$可由 $x_1,\cdots,x_n$ 经有限次运算$\neg$和$\rightarrow$得到,这里自变量 $x_1,\cdots,x_n\in\{0,1\}$.

定理 1　任一真值函数可由一元函数$\neg$和二元函数$\rightarrow$表示出来. 改用命题连接词的语言,就是说:$\{\neg,\rightarrow\}$是命题连接词的完全组.

证　对真值函数的元数 n 归纳.

先讨论 $n=1$ 的情形. 一元真值函数一共只有四个,用 f_1,f_2,f_3,f_4 表示,它们是:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

这四个一元函数都可用$\neg$与$\rightarrow$表示出来:

$$f_1(x)=x\rightarrow x,$$
$$f_2(x)=x,$$
$$f_3(x)=\neg x,$$
$$f_4(x)=\neg(x\rightarrow x).$$

$n>1$ 时,为证明任一 n 元真值函数 f 可用$\neg$与$\rightarrow$表示出来,先定义另外三个真值函数 g,h,k 如下:

$$g(x_1,\cdots,x_{n-1})=f(x_1,\cdots,x_{n-1},1),$$
$$h(x_1,\cdots,x_{n-1})=f(x_1,\cdots,x_{n-1},0),$$
$$k(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=(h(x_1,\cdots,x_{n-1})\to x_n)\to\neg(g(x_1,\cdots,x_{n-1})\to\neg x_n).$$

g,h 是 $n-1$ 元的，k 是 n 元的．由归纳假设，g 与 h 可由$\neg$及$\to$表示出来．

下面证明 $k=f$．

$$\begin{aligned}k(x_1,\cdots,x_{n-1},1)&=(h(x_1,\cdots,x_{n-1})\to 1)\to\neg(g(x_1,\cdots,x_{n-1})\to\neg 1)\\&=1\to\neg\neg g(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(\text{用了公式 }3^\circ,4^\circ\text{及}\neg 1=0)\\&=1\to g(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(\text{用了公式 }1^\circ)\\&=g(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(\text{用了公式 }2^\circ)\\&=f(x_1,\cdots,x_{n-1},1).\quad(\text{由 }g\text{ 的定义式})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(x_1,\cdots,x_{n-1},0)&=(h(x_1,\cdots,x_{n-1})\to 0)\to\neg(g(x_1,\cdots,x_{n-1})\to\neg 0)\\&=\neg h(x_1,\cdots,x_{n-1})\to 0\\&\qquad(\text{用了公式 }3^\circ,4^\circ\text{及}\neg 0=1,\neg 1=0)\\&=\neg\neg h(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(\text{用了公式 }4^\circ)\\&=h(x_1,\cdots,x_{n-1})\quad(\text{用了公式 }1^\circ)\\&=f(x_1,\cdots,x_{n-1},0).\quad(\text{由 }h\text{ 的定义式})\end{aligned}$$

所得结果说明，对任意 $x_1,\cdots,x_n\in\{0,1\}$都有

$$k(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n),$$

于是 $f=k$．在 k 的定义式中，由于 g 与 h 按归纳假设可由$\neg$与$\to$表示出来，所以 k(即 f)也具有这种性质． □

注意等式 $x\to y=\neg(x\wedge\neg y)$对 $x,y\in\{0,1\}$总是成立的(不妨一一验算)，这说明涉及$\to$的运算都可用$\neg$和$\wedge$来代替．于是有：

推论 1 $\{\neg,\wedge\}$是命题连接词的完全组．

再注意等式 $x\to y=\neg x\vee y$ 对 $x,y\in\{0,1\}$总成立，这说明涉及$\to$的运算都可用$\neg$和$\vee$来代替．于是有：

推论 2 $\{\neg,\vee\}$是命题连接词的完全组．

关于完全组更详尽的讨论以及关于命题演算的其他知识可参见[59]，10～74页．

如果世上所有的推理过程都能在命题演算的框架内得到形式化，那么我们的世界就简单了：只要有一部理想计算机，一切推理从理论上说都可由它去做．可惜情形并非如此，连数学的一小部分—— 一般算术理论的推理也不能全部归为命题逻辑(从根本上说，这是因为算术理论涉及无限多个自然数)．我们还需要建立比命题逻辑更细致更复杂的逻辑系统．

§2.2 谓词演算简介

在命题演算中,用命题变元表示的简单命题是不能再分解的最小单位.这一点使命题演算的系统比较简单,但应用范围受到限制.比如,古典三段论就不能很好地纳入命题逻辑.让我们看下面的推理:

凡是大于1的自然数都小于自己的平方.

自然数 $n+2$ 大于1.

所以 $n+2<(n+2)^2$.

这个推理方法是正确的,但不能在命题逻辑中得到恰当表现(不妨自己尝试一下在命题逻辑的系统内去表现上述推理).要能恰当表现这样的或类似的推理,就必须深入到"原子命题"——简单命题的内部去;而一深入到简单命题的内部,例如,深入到数学中一个简单命题的内部,那就会涉及到个体对象(如常数或变数),函数(个体对象的运算),谓词(个体对象的性质或个体对象之间的关系)与量词(存在量词或全称量词).

谓词演算对命题演算的改进在于:深入分析简单命题的内部结构,并引进量词运算.这种系统能更深入,更广泛地表现实际的推理过程,是各种数学形式系统的一般框架.

2.2.1 谓词演算语言

谓词演算是一种形式系统,可以看成是一种形式语言.它有一张字母表,且有自己的词法、句法及文章构成法.本小节先介绍它的词法和句法.

一、字母表

谓词演算的字母表由以下7种字母组成.

(1) 个体变元(简称变元):$x,y,z,x_1,y_1,z_1,\cdots$.

(2) 个体常元(简称常元):$c,\cdots$.

(3) 函数符(或称运算符):$f,\cdots$(每个函数符有各自确定的元数).

(4) 谓词(或称关系符):$R,\cdots$(每个谓词有各自确定的元数).

(5) 命题连接词:$\neg$(否定),$\wedge$(析取),$\vee$(合取),$\rightarrow$(蕴涵),$\leftrightarrow$(等价).

(6) 量词:$\forall$(全称量词),$\exists$(存在量词).

(7) 左、右括号与逗号:(,),,.

以上符号中,(1),(5),(6),(7)这四部分符号是各种谓词演算系统所共有的逻辑符号,其中命题连接词的使用方法与命题演算中相同.不同的系统差别在(2),(3),(4)这三部分,通常也把(2),(3),(4)这三部分叫做所讨论的特

殊系统的"语言".

个体变元与个体常元都是用来表示个体对象的.它们的区别是:第一,一个个体变元用来表示特定的某类个体对象中的某个并未确定的个体对象,而一个个体常元则用来表示该类个体对象中一个确定的个体对象;第二,个体变元有无限个,而个体常元可以有无限或有限个,甚至可以一个也没有,这要视所研究的具体系统而定.

函数符与谓词都可以有无限或有限个,差别是:有些系统中,函数符可以一个也没有;但不管什么具体系统,谓词至少有一个.在各种数学形式系统中,都有一个二元谓词——等词.本书中等词就用 = 表示.

二、项的形成规则

项是谓词演算的最基础的单位,相当于普通语言中的名词、代名词.项的形成规则:

(1) 每个个体变元是项.

(2) 每个个体常元是项.

(3) 设 f 是个 n 元函数符,且 $t_1,\cdots,t_n$ 是项,则 $f(t_1,\cdots,t_n)$是项.

(4) 除了以上三条规则形成的项,该系统没有别的形式的项.

项这种特殊的字母串表示特定种类的个体对象.

三、公式的形成规则

形式语言中如何造句?第一步是形成原子公式.

这 R 是个 n 元谓词,$t_1,\cdots,t_n$ 是项,则把符号串 $R(t_1,\cdots,t_n)$叫做原子公式.当 R 是个二元谓词时,$R(t_1,t_2)$常写成(t_1Rt_2)(外层括号有时省去).例如等词是二元谓词,故 $t_1=t_2$ 是原子公式.原子公式是用来表示命题的最小单位.

造句的第二步是形成一般的公式.公式用来表示一般命题(包括简单命题与复合命题).

公式的形成规则:

(1) 每个原子公式都是公式.

(2) 设 p 与 q 是公式,则 $\neg p,(p\wedge q),(p\vee q),(p\rightarrow q),(p\leftrightarrow q)$都是公式.

(3) 设 p 是公式,x 是个体变元,则 $\forall xp$ 与 $\exists xp$ 也是公式.

(4) 除了以上三种规则形成的公式,系统中没有别的形式的公式.

公式 $\forall xp$ 的直观意思是对任意 x,p 皆成立;$\exists xp$ 的直观意思是:存在 x 使 p 成立.

注意 $\forall x(p\rightarrow q)$与 $\forall xp\rightarrow q$ 的区别.前面公式中 $\forall x$ 的作用范围(简称

范围)是 $p\to q$,后面公式中 $\forall x$ 的作用范围是 p.

公式 $\forall xp$ 与 $\exists xp$ 中出现的 x 叫做约束变元. 公式中变元若不是约束变元,就叫做自由变元,或者说它在公式中自由出现. 例如公式 $\forall y\neg(x=y)$ 中,y 是约束变元,x 是自由变元(自由出现一次). 不含自由变元的公式叫做语句,例如 $\forall x\forall y\neg(x=y)$. 注意语句与一般公式的区别. 语句有确定的真假值,而一般公式的真假值往往是不确定的. (试将公式 $x>5$ 与语句 $\exists x(x>5)$ 及 $\forall x(x>5)$ 加以比较.)

2.2.2 什么是数学证明?

数理逻辑奠基人之一弗雷格曾说:"数学的本质就在于,一切能证明的都要证明."[66]什么是数学证明? 人们建立起谓词演算,给证明下了一个定义. 这是用精确语言给出的证明定义. 有了这个定义,"数学证明"成了一个数学概念,从而进入数学的研究范围之内.

下面让我们仔细考察证明的定义,注意它不过是日常数学实践中证明活动的一种精确化.

谈证明,首先要有公理. 谓词演算的公理(叫做逻辑公理)分三类:永真式,量词公理与等词公理.

一、谓词演算永真式

把命题演算的永真式中所有命题变元换成谓词演算的任意公式(同一命题变元要用同一公式全部替换)所得到的公式叫做谓词演算的永真式. 例如,肯定后件律

$$p\to(q\to p),$$

现在是谓词演算的永真式,不过这里的 p,q 是谓词演算的任意公式. 把永真式当作公理是很自然的,不管它的子公式(支命题)的真假如何,它总为真.

二、量词公理

(1) 设 p,q 是谓词演算的任意公式且变元 x 不在 p 中自由出现,则下面的公式是一条公理:

$$\forall x(p\to q)\to(p\to\forall xq).$$

(2) 设 t 是任意项,$p(x)$ 是任意公式,用 t 替换 $p(x)$ 中所有自由出现的变元 x 得到的公式记作 $p(t)$. 若 t 中原有的变元在公式 $p(t)$ 中没有受到约束,则下面的公式是一条公理:

$$\forall xp(x)\to p(t).$$

这种公理模式直观涵义是清楚的,它是对全称量词性质的明确规定. 如果变元 x 在公式 $p(x)$ 中并不自由出现,那么 $p(t)$ 就是 $p(x)$,没有变化. 公理对

项 t 所加的限制条件是为了避免替换时出现变元干扰. 例如,把 $p(x)$ 取为 $(x>5)\to\exists y(x>y)$,把 t 取为 y,具体写出上面的公理,是什么样?(这时 $p(y)$ 是 $(y>5)\to\exists y(y>y)$.)

三、等词公理

等词公理是对直观概念"相等"的性质作出的规定,它们是:

(1) $t=t$.

(2) $t_i=u\to(f(t_1,\cdots,t_i,\cdots,t_n)=f(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))\quad(i=1,\cdots,n)$.

(3) $t=u\to(p(t)\to p(u))$.

其中 $t,u,t_1,\cdots t_n$ 是任意项,f 是任一 n 元函数符,$p(u)$ 是用 u 替换公式 $p(t)$ 中(一处或多处)的 t 所得结果,且 t 与 u 中变元不在替换处受约束. 公理(2)与(3)表现了"相等"的可替换性. 所有等词公理都反映了"相等"在数学上的实际使用情况.

除了公理,为了给证明下定义,还需要两条推理规则.

(1) 推理规则一——分离规则(Modus Ponens):

由 p 与 $p\to q$ 推出 q,

其中 p 与 q 是任意公式. 此时说 q 由 p 与 $p\to q$ 用分离规则推出.

(2) 推理规则二——推广规则(Generalization):

由 p 可推出 $\forall xp$,

其中 p 是任意公式. 此时说 $\forall xp$ 由 p 用推广规则推出.

这两条推理规则都是日常数学证明中习惯使用的. 例如,当我们对数 x 没作特殊规定时得知 $x^2\cdot x^3=x^5$,便可得出结论:任何数 x 满足 $x^2\cdot x^3=x^5$(写成 $\forall x(x^2\cdot x^3=x^5)$).

现在可以给证明下个定义.

设 Γ 是给定的语句集(称作假定集). 我们说公式 p 从假定集 Γ 可证,是指能写出一篇文章——公式的有限序列,序列中的每个公式或者是 Γ 的成员,或者是一条公理,或者是由它前面已写出的公式用推理规则(分离规则或推广规则)推出,且该公式序列的最后一个公式就是 p. 此时称该公式序列叫做 p 从 Γ 的证明.

下面再用符号重述这个定义.

公式 p 从假定(语句)集 Γ 可证,记作 $\Gamma\vdash p$,是指存在公式的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$,其中 $p_n=p$,且对每个 $k=1,\cdots,n$ 满足:

(1) $p_k\in\Gamma$,或

(2) p_k 是公理,或

(3) 在 p_k 之前已出现 p_i 与 $p_i\to p_k$,或

(4) p_k 形为 $\forall x p_i$,其中 $i<k$,x 是某个变元.

符合上述条件的 $p_1,\cdots,p_n$ 叫做 p 从 Γ 的证明.

当 Γ 是空集时,$\Gamma\vdash p$ 写成 $\vdash p$,此时称 p 为该系统的定理. 从上面关于证明的定义立即可看出下面的重要性质:

紧致性　设 $\Gamma\vdash p$,则存在 Γ 的有限子集 Δ 使 $\Delta\vdash p$.

紧致性成立的理由是:写出 p 从 Γ 的证明时,只会用到 Γ 的有限个语句.(证明的本身是有限长的语句串.)

我们说语句集 Γ 无矛盾,是指任何公式 q 都不会使 $\Gamma\vdash q$ 与 $\Gamma\vdash\neg q$ 同时成立. 否则说 Γ 有矛盾,即存在公式 q 使 $\Gamma\vdash q$ 与 $\Gamma\vdash\neg q$ 同时成立. 由关于证明的紧致性命题知:

语句集 Γ 无矛盾,当且仅当 Γ 的所有有限子集都无矛盾.

例1　证明 $\vdash\exists x(x=x)$.

这需要写出语句 $\exists x(x=x)$ 的一个证明(没有假定集). 首先注意 $x=x$ 是等词公理(等词公理第一种模式的特例),再注意存在量词与全称量词的关系:

$$\exists x(x=x)\text{即}\neg\forall x\neg(x=x).$$

这样我们可以按步写出 $\exists x(x=x)$ 的一个符合定义要求的证明如下:

(1) $x=x$　　(等词公理)

(2) $\forall x\neg(x=x)\to\neg(x=x)$.

(量词公理第二种模式的特例,取 p 为 $\neg(x=x)$,取 t 为 x.)

(3) $(\forall x\neg(x=x)\to\neg(x=x))\to((x=x)\to\neg\forall x\neg(x=x))$.

(这是永真式 $(p\to\neg q)\to(q\to\neg p)$ 的特例.)

(4) $(x=x)\to\neg\forall x\neg(x=x)$　　(由(2)与(3)用分离规则)

(5) $\neg\forall x\neg(x=x)$　　(由(1)与(4)用分离规则)

此即 $\exists x(x=x)$.

以下练习属于逻辑练习,与后文关系并不直接,可暂先不做,或先只选做一部分.

练习1　*证明以下结论(Γ 是语句集).*

1°　*若 Γ 有矛盾,则任一公式 p 从 Γ 可证.*

*2°　*(演绎定理)$\Gamma\vdash p\to q$ 当且仅当 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$,其中 q 是任意公式,p 是任意语句.*

3°　*(反证律)若 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$ 及 $\neg q$,则 $\Gamma\vdash p$,其中 q 是任意公式,p 是任意语句.*

4°　*(归谬律)若 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 及 $\neg q$,则 $\Gamma\vdash\neg p$,其中 q 是任意公式,p*

是任意语句.

(3°中反证律与 4°中归谬律有什么不同?)

演绎定理、反证律与归谬律的一个共同特点是:用增加新假定的方法使证明比较容易进行.

5° $\{\forall xp\}\vdash\exists xp$.

6° 若 $\vdash p\leftrightarrow q$,则 $\vdash\neg p\leftrightarrow\neg q$.

7° 若 $\vdash p\leftrightarrow q$ 且 $\vdash r\leftrightarrow s$,则 $\vdash(p\wedge r)\leftrightarrow(q\wedge s)$, $\vdash(p\vee r)\leftrightarrow(q\vee s)$.

8° 若 $\vdash p(x)\leftrightarrow q(x)$,则 $\vdash\forall xp(x)\leftrightarrow\forall xq(x)$, $\vdash\exists xp(x)\leftrightarrow\exists xq(x)$.

下面的练习 2 可用来检测一下自己的逻辑水平.

练习 2 尝试依靠自己已有的逻辑知识判断以下公式中哪些是谓词演算的定理.(思考时可对公式中出现的符号在自己设想的论域中作出解释,也就是从语义上进行具体内容的考察,而不必从语法上证明或否证.)

1° $\forall xp(x)\leftrightarrow\forall yp(y)$, y 不在 $p(x)$ 中出现($p(x)$ 是某个公式,以下同).

2° $\exists xp(x)\leftrightarrow\exists yp(y)$, y 不在 $p(x)$ 中出现.

3° $\neg\forall xp(x)\leftrightarrow\exists x\neg p(x)$.

4° $\neg\exists xp(x)\leftrightarrow\forall x\neg p(x)$.

5° $\forall x\forall yp\rightarrow\forall y\forall xp$.

6° $\exists x\exists yp\rightarrow\exists y\exists xp$.

7° $\forall x(\neg p(x)\rightarrow\neg p(c))$, c 为常元.

8° $\exists x\forall yR(x,y)\rightarrow\forall y\exists xR(x,y)$, R 是某个二元谓词(以下同).

9° $\forall x\exists yR(x,y)\rightarrow\exists y\forall xR(x,y)$.

10° $\forall x\forall yR(x,y)\rightarrow R(x,y)$.

11° $\forall x\forall yR(x,y)\rightarrow\forall xR(x,x)$.

12° $\forall xR(x,x)\rightarrow\exists y\forall xR(x,y)$.

13° $\forall x(p(x)\wedge q(x))\leftrightarrow(\forall xp(x)\wedge\forall xq(x))$.

14° $\exists x(p(x)\wedge q(x))\leftrightarrow(\exists xp(x)\wedge\exists xq(x))$.

15° $\forall x(p(x)\vee q(x))\leftrightarrow(\forall xp(x)\vee\forall xq(x))$.

16° $\exists x(p(x)\vee q(x))\leftrightarrow(\exists xp(x)\vee\exists xq(x))$.

17° $\forall x(p(x)\rightarrow q(x))\leftrightarrow(\forall xp(x)\rightarrow\forall xq(x))$.

18° $\forall x(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow\forall xq)$, x 不在 p 中自由出现.

19° $\exists x(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow\exists xq)$, x 不在 p 中自由出现.

*20° $\forall x(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\exists xp\rightarrow q)$, x 不在 q 中自由出现.

*21°　$\exists x(p \to q) \leftrightarrow (\forall xp \to q)$，$x$ 不在 q 中自由出现.

练习 3　（对偶律）设语句 p 中出现的命题连接词是$\neg$，$\vee$ 与 $\wedge$. 把 p 中所有原子公式都改为它们的否定，$\vee$ 与 $\wedge$ 互换，$\forall$ 与 $\exists$ 互换，得 p^*. 试证

$$\vdash p^* \leftrightarrow \neg p.$$

***练习 4**　设 $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\exists xp(x) \to p(c)\}$，常元 c 不在 $p(x)$ 中出现. 试证若 Γ 无矛盾，则 Γ_1 也无矛盾.

2.2.3　数学形式系统举例——形式算术

近代数理逻辑为数学研究提供了一种崭新的方法——形式化的方法，谓词演算就是这种方法的大框架. 各种具体的数学形式系统一般都是特殊的带等词的谓词演算系统.

采用形式化方法，研究者有很大的选择自由：

第一，语言选取是自由的（这里的语言指字母表除一般逻辑符号外的部分，包括常元，函数符与谓词），

第二，公理选取是自由的，

第三，对语言作何具体解释是自由的.

仅以语言选取为例：群论语言是 $\{*, e\}$，其中 $*$ 是一个二元运算符，e 是常元；环论语言是 $\{+, \cdot, 0\}$，其中 $+$，$\cdot$ 都是二元运算符，0 是常元；域论语言是 $\{+, \cdot, 0, 1\}$，比环论多一个常元；序域理论的语言是 $\{<, +, \cdot, 0, 1\}$，比域论多了一个二元谓词 $<$；……

光是算术，它的形式系统就是多种多样的. 下面介绍常见的一种形式算术，有时称作 Peano 形式算术.（注意在第一章 1.2.3 中介绍的 Peano 自然数理论并不是形式系统.）

语言（不包括逻辑符号的字母表）：

$$\mathscr{L} = \{+, \cdot, s, 0\},$$

其中 $+$，$\cdot$ 都是二元运算符，s 是一元函数符（叫做后继运算符），0 是常元符.

算术公理

N1　$\forall x(s(x) \neq 0)$　（$s(x) \neq 0$ 即 $\neg(s(x) = 0)$）.

N2　$\forall x \forall y(x \neq y \to s(x) \neq s(y))$.

N3　$\forall x(x + 0 = x)$.

N4　$\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$.

N5　$\forall x(x \cdot 0 = 0)$.

N6　$\forall x \forall y(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$.

N7　$(p(0) \wedge \forall x(p(x) \to p(s(x)))) \to \forall xp(x)$，其中 $p(x)$ 是任意公

式.

注意以上公理 N1～N7 与 1.2.3 中介绍的 Peano 公理 PA1～PA5 的异同. 因为后继函数与 0 进入语言 $\mathscr{L}$,原 Peano 公理的 PA1 与 PA2 已成多余. N1 是 PA3,N2 是 PA4. N7 中的公式 $p(x)$ 严格限制为能用现在的语言 $\mathscr{L}$ 写出的公式. 集论符号没有进入 $\mathscr{L}$,这使得 N7 的适用范围小得多. N3～N6 是对进入 $\mathscr{L}$ 的 + 与 · 所作的规定.

上面的形式算术系统有一个重要特点,那就是能用机械程序(或说算法)确定以下事项:

1° 任一 $\mathscr{L}$- 符号串是不是项,是不是公式.

2° 任一 $\mathscr{L}$- 公式是不是公理(算术公理或逻辑公理).

3° 任一有限长的 $\mathscr{L}$- 公式序列是不是从算术公理集的证明.

由于 Peano 形式算术具有上述性质(即能机械地鉴别它的证明),我们称它是"递归可公理化"的. 关于它有以下重要结论.

第一,按 Gödel 不完备性定理,若它是无矛盾的,则它一定是不完备的,即存在它的不可判定语句.(对于该系统,无矛盾性与完备性不可兼得.)

第二,若它是无矛盾的,则它的无矛盾性在它这个系统内得不到证明.

第三,它是不可判定的,即不存在算法可用来确定任给的公式是否从它的公理集可证.

关于对以上结论的意义的理解与讨论,可参看[68].

Peano 形式算术有一个意想的解释域——自然数集 **N**. 人们原想从该系统的公理集出发能机械地抓住关于自然数的所有真命题,这种想法已被证明是不能实现的. 对这一事实进行更深入地思考后发现,满足该系统前述所有公理的结构不是惟一的. 除了自然数集 **N**,算术公理还有其他的模型. 关于这一点及其重要意义,后面我们还要进一步讨论.

第三章　集论基本概念

学习集论,可为学习现代数学知识作准备. 但从数学基础的角度学习集论,意义远不止于此. 我们将会看到:只需少量关于集的基本性质的一些规定,(这是很小的基底!)便可建起数学主体大厦. 事情怎么会是这样? 亲身经历一次从集论基底到数学主体的一段路程,无疑会帮助我们认识数学的本质,数学方法的特点,数学被广泛应用的原因以及数学内在的统一性.

本章介绍 ZF 的前几个公理,建立起集论基本概念,并在 ZF 框架内走到古典数学的源头.

§3.1　ZF 语言

最常用的集论系统是 ZF(参见 1.3.6). 这是一种特殊的带等词的谓词演算,是有精确语法的形式语言.

ZF 的字母表很简单:除了一般的包括等词的逻辑符号,只有一个二元谓词$\in$. 除了个体变元,ZF 没有别的项. 原子公式只有两种形式:$x=y$ 与 $x\in y$,其中 x,y 是任意变元.

个体变元表示集. 对公式 $x\in y$ 的自然解释是:集 x 是集 y 的元素. 这样,每个公式也就自然解释为某个关于集的命题,例如,公式

$$\forall x(x\in a\rightarrow x\in b)$$

表示命题"集 a 的每个元素都是集 b 的元素";公式

$$\exists x\forall y(\neg(y\in x))$$

表示命题"存在着没有任何元素的集". 反过来,可以把关于集的命题翻译成公式. 例如,命题"存在把一切集作为自己成员的集"(不论其真假)可翻译成公式

$$\exists x\forall y(y\in x);$$

命题"存在以集 a 和集 b 为仅有元素的集"可翻译成公式

$$\exists x\forall y(y\in x\leftrightarrow(y=a\vee y=b)).$$

公式$\neg(x=y)$常写作 $x\neq y$,公式$\neg(x\in y)$常写作 $x\notin y$. 为了方便,常在公式中引进一些缩写,例如,

$\forall x\ (x\in a\rightarrow x\in b)$缩写为 $a\subset b$(或 $b\supset a$),读作"a 是 b 的子集";

$\forall x\ (x\in a\rightarrow p(x))$缩写为$\forall x\in a\ p(x)$,意为“每个 a 中元素 x 皆具有性质 $p(x)$”;

$\exists x\ (x\in a\wedge p(x))$缩写为$\exists x\in a\ p(x)$,意为“存在 a 中元素 x 具有性质 $p(x)$”;

$\exists x\ (p(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow y=x))$缩写为$\exists!\ xp(x)$,意为“惟一存在 x 具有性质$p(x)$”.

在 ZF 系统中,等词公理(参见 2.2.2)只有以下两种形式:

(1) $x=x$.

(2) $x=y\rightarrow(p(x)\rightarrow p(y))$.

其中 $p(y)$是用 y 替换公式$p(x)$中(一处或多处)自由出现的 x 所得结果,且 y 不在$p(x)$中出现. 一个具体例子是:

$$x=y\rightarrow(z\in x\rightarrow z\in y).$$

公式中除了为方便起见引进新符号,有时甚至还夹进一些普通语言. 这样做可使公式更紧凑,意义更容易理解. 凡引进的新符号及日常用语必要时总可消去,总可回到原来的语言.

§3.2 外延公理与内涵公理

关于集,数学上最早采用的是 Cantor 的朴素的概念:

把人们直观的或想象的一些确定的可区分的对象汇总在一起成一整体,便是一个集.

按这样的朴素概念,形成一个集是很自由的,几乎不受限制. 但悖论的出现说明,不加限制地使用“集合”一词会出毛病. 形成一个集,必须要有一些限制,必须要有一些规定. 集论公理系统 ZF 就给出了这样一些规定. 下面我们要逐个介绍 ZF 这个系统的公理. 在这个系统的论域中只有集. 除了集,这个系统没有别的研究对象.

对集的限制也不能太死. 限制太死,集太少,甚至没有了. 首先要肯定集存在. 我们用 ZF0 表示肯定集存在的公理:

ZF0(集存在公理) $\exists x(x=x)$.

这条公理是为了保证集论论域非空. 事实上,这条公理是带等词的谓词演算的逻辑定理(参见 2.2.2 例 1),本可以不作为公理写出来. 现在写出来,是为了强调一下论域非空. 真正 ZF 系统的公理是从下面的外延公理开始的.

ZF1(外延公理(The Axiom of Extensionality))

$$\forall x\ (x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b.$$

这条公理的意思是:两集若有相同的元素,则相等. 这就是说,一集完全由它的成员确定,即完全由它的外延确定.

作为数学的基础,集论只研究集之间的一般关系,而它所研究的最基本的一般关系又只有两个:相等(=)与归属(∈),其他关系都由=与∈演变而来. 外延公理对这二者(=与∈)之间的联系作了明确的规定. 于是,集之间最原始的基本关系只剩下一个∈. 对于我们的研究对象——集,除了归属关系,我们不研究也不去管集本身有什么实际的具体内容. 由此可以看出数学这门科学的特点:抽象性、精确性和应用的广泛性.

"集由外延完全确定",这一规定作为集论的第一公理之所以能够很好地服务于数学,从根本上也表现了数学从量的方面观察世界的这一本质特征.

外延公理也可写成

$$(a \subset b \vee b \subset a) \rightarrow a = b.$$

为证明二集 a 与 b 相等,可分开证明 $a \subset b$ 与 $b \subset a$ 这两件事.

外延公理是个蕴涵式. 根据等词的替换性,该蕴涵式的反方向也成立:

$$a = b \rightarrow \forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b).$$

两个方向合起来,有

$$\forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b,$$

即

$$(a \subset b \vee b \subset a) \leftrightarrow a = b.$$

注　为了便于理解,上面给出的外延公理 ZF1 是简略形式,其中 a, b 表示任意集.(公式前面省略了量词 $\forall a \forall b$.)ZF1 可以更形式地写成语句:

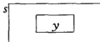
$$\forall x \forall y\ (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y).$$

如何形成一个集,定义一个集? 一种方法是:明确一一列出该集有哪些元素. 这种具体规定集的外延的"外延定义法"数学上往往行不通,特别对于无限集. 下面的内涵公理给出的方法是数学上常用的基本方法,但更加规范.

ZF2(内涵公理(The Axiom Schema of Comprehension))　*设 s 为已知集,则*

$$\exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge p(x)),$$

其中 $p(x)$ 是任一公式,y 不在其中出现.



直观上,内涵公理断言存在一个集 y,它由集 s(已知集)中具有性质 $p(x)$

的那些 x 组成. 显然,y 是 s 的子集. 用公式 $p(x)$ 表示的性质确定了 y 这个子集的存在. 这个性质是用集论语言精确给出的,所以它精确地规定了 y 在 s 中的规模. 公理要求变元 y 不在 $p(x)$ 中出现,是为了避免变元干扰,公理所断言存在的集 y 不应预先出现在公式 $p(x)$ 中. 正如通常所说,定义项不能直接地或间接地包括被定义项;后者(被定义项)本不明确(这才需要定义),而前者(定义项)必须事先完全明确.

注 把 ZF2 写成语句,应该是:

$$\forall s \exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in s \land p(x)).$$

内涵公理通常又称作分离公理或概括公理. 它是一种公理模式,其中含有无数条公理——每个公式 $p(x)$ 都对应着一条公理.

已知一个集 s,按 ZF2 可以用随便一条性质 $p(x)$ 定义出 s 的子集 y. 现在的问题是,对给定的 s 及 $p(x)$,这个集 y 是不是惟一的?

命题 1 对给定的集 s 及公式 $p(x)$,内涵公理所断言存在的集 y 是惟一的:

$$\exists ! y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in s \land p(x)).$$

证 给定 s 和 $p(x)$,设 y 和 z 都是 ZF2 所断言存在的集,即同时有

$$\forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in s \land p(x))$$

及

$$\forall x\ (x \in z \leftrightarrow x \in s \land p(x)).$$

由此得

$$\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z),$$

再由外延公理 ZF1 得 $y = z$. □

有了命题 1,我们可按习惯将 ZF2 中的

$$\forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \in s \land p(x))$$

缩写成

$$y = \{x \mid x \in s \land p(x)\},$$

或

$$y = \{x \in s \mid p(x)\}.$$

内涵公理现可写成

$$\forall s \exists y\ (y = \{x \in s \mid p(x)\})(\text{公式 } p(x) \text{ 中不含 } y).$$

集论在公理化以前,人们常自由地形成集 $\{x \mid \varphi(x)\}$,其中 $\varphi(x)$ 是关于 x 的某种性质. 这种不加限制地形成集的方式可能会产生矛盾,例如产生了罗素悖论:令 $b = \{x \mid x \notin x\}$,则有

$$b \in b \leftrightarrow b \notin b.$$

现在根据内涵公理,不能说$\{x \mid \varphi(x)\}$一定是集. 罗素悖论中的

$$b = \{x \mid x \notin x\}$$

则肯定不是集. 要规定一个集,不能光凭一条性质;而是手头上预先要有一个集 s,在 s 内部用公式 $p(x)$ 去形成 s 的子集. 按照内涵公理,罗素悖论就可以避免了.

集是存在的(ZF0),但至此我们尚未见到一个具体的集. 现取 s 为任意一个集. 按内涵公理及命题 1,用公式 $x \neq x$ 可以惟一定义一个集

$$y = \{x \in s \mid x \neq x\}.$$

我们把这个集叫做空集(empty set),记作$\varnothing$. 这是没有元素的集.(若它有元素 x,则 $x \neq x$,与 $x = x$ 矛盾.)因为$\varnothing$这个集没有元素,按照外延公理,$\varnothing$与定义它时选择的集 s 无关.

空集$\varnothing$是我们见到的第一个具体的集. 为了形成其他集,还需要有新的公理.

关于集,有一种直观上合理的思考方式:形成一个集 a,要给它选择成员;这些成员理所当然在 a 形成之前就事先已经是形成了的. 这就像盖房子,所用材料必须是事先已有的材料. ZFC 的公理的提出,都是与这种思考方式一致的.

练习 1 设 s 是某个集. 令 $b = \{x \in s \mid x \notin x\}$. 试证:

(1) $b \notin b$, (2) $b \notin s$.

然后回答:是否存在把一切集都作为自己元素的集?

思考题 1 ZF 语言中没有$\varnothing$这个符号. 引进它是为了方便. 怎样消去它? 例如,怎样用原语言来表示 $y = \varnothing$与$\varnothing \in z$?

§3.3 无序对公理

用前面已有的公理可以形成空集$\varnothing$这个具体的集. 除了$\varnothing$,是否还有别的集? ZF0 肯定了集是存在的,但未说集有多少. ZF1 对 = 与$\in$的关系作了规定,但它不是一个用来形成新集的公理. ZF2 可用来形成集,但它只允许在一已知集内形成新集,这种新集不会比原集更大. 总之,关于是否存在除空集外的其他集,前面的公理没有提供任何信息.

ZF3(无序对公理(The Axiom of Pair)) 设 a, b 为已知集,则

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)),$$

上式常简写成

$$\exists y\ (y = \{x \mid x = a \lor x = b\}),$$

或更简单地写成

$$\exists y\ (y = \{a,b\}).$$

按照外延公理,ZF3 对给定的集 a 与集 b 所断言存在的集 $\{a,b\}$ 是惟一的. 集 $\{a,b\}$ 叫做 a 与 b 的无序对.

无序对公理可以更形式地写成语句:

$$\forall a \forall b \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x = a \lor x = b)).$$

更直观点,无序对公理是说:

若 a,b 是集,则 $\{a,b\}$ 是集.

无序对 $\{a,b\}$ 是以 a 与 b 为仅有成员的集,其中 a 与 b 可以不等,也可以相等. 当 $a=b$ 时,记 $\{a\}=\{a,a\}$,叫做由集 a 形成的独元集.

有了无序对公理,可以用来形成许多新的集,如 $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$,等等.

在无序对 $\{a,b\}$ 中,a 和 b 的地位是平等的: $\{a,b\}=\{b,a\}$. 若想要让 a 与 b 的地位有所区别,应如何做? 为使集论服务于数学,这是重要的事. 集论的展开,必须引进有序对的概念.

以集 a 为先集 b 为后的有序对(ordered pair)用 (a,b) 表示,是指集

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

这样来定义有序对,理由是清楚的:从 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 中我们看见了集 a 与集 b,同时还看见了 a 与 b 的地位有所不同. 除非 $a=b$,否则不会有 $(a,b)=(b,a)$(见下面命题 1).

在有序对 (a,b) 中,我们常按习惯说 a 是第一坐标或第一分量,b 是第二坐标或第二分量.

按定义,有序对是集,且具有性质:

命题 1 $(a,b)=(c,d)\rightarrow(a=c\land b=d)$.

证 情形 1, $a=b$. 此时由 $(c,d)=(a,a)$ 得

$$\{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\},$$

于是有 $\{c,d\}=\{a\}$,进而得 $c=d=a$.

情形 2, $a\neq b$. 此时 $\{c\}\neq\{a,b\}$,否则 $c=a=b$. 由

$$\{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

可得 $\{c\}=\{a\}$ 和 $\{a,b\}=\{c,d\}$,前者导致 $c=a$,进而由后者得 $b=d$. □

有序对的定义方式不是惟一的. 但定义方式并不重要,重要的是是否具有命题 1 中的性质;只要有此性质,不管构造方式如何,应用是一样的.

思考题 1 设法用另一种方式来定义有序对 (a,b),使命题 1 也成立.

利用有序对可以进一步定义

$$(a,b,c)=((a,b),c),$$
$$(c,b,c,d)=((a,b,c),d),$$
$$\vdots$$

它们都具有相应于命题 1 的性质.

思考题 2 作为集(a,b)与(a,b,c)各有几个元素?

利用无序对公理 ZF3 形成的很多新集形式上可能很复杂,但有个共同点:至多有两个成员,即至多是二元集. 想要得到更大的集,需要有新的公理.

练习 1 以下结论哪些是正确的?

(1) $\varnothing\in\varnothing$.　(2) $\varnothing\subset\varnothing$.　(3) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

(4) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$.　(5) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$.　(6) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$.

(7) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$.　(8) $\varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$.　(9) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$.

(10) $\{\varnothing\}\subset\{\{\varnothing\}\}$.　(11) $\varnothing\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.　(12) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(13) $\{\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.　(14) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

练习 2 对于以下条件分别判断 a,b,c,d 之间有什么关系,并证明所作的判断.

(1) $\{\{a,b\},c\}=\{\{a\},c\}$.

(2) $\{\{a,b\},\{c\}\}=\{\{a\}\}$.

(3) $\{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\}=\{\{\{c\},\varnothing\},\{\{d\}\}\}$.

练习 3 设$(a,b,c)=(a',b',c')$,证明 $a=a',b=b',c=c'$.

§3.4 并集公理与幂集公理

一种构造集的方式是:把已知的一些集并在一起,由这些集的所有元素汇合起来组成新集——并集. 原来的这些集的个数是任意的,例如,可以是两个,三个或任意多个. 这些集的集(族)在下面的并集公理 ZF4 中用 a 表示.

ZF4(并集公理(The Axiom of Union)) 设 a 为已知集,则

$$\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow\exists t\in a(x\in t)),$$

上式可简写成

$$\exists y(y=\{x\mid\exists t\in a(x\in t)\}),$$

其中把$\{x\mid\exists t\in a(x\in t)\}$记作$\bigcup a$.

ZF4 肯定了$\bigcup a$ 是集,我们把它叫做 a 的并集. 具体地说,$\bigcup a$ 是把a 的成员并起来所得的集,即把 a 的所有元素的元素汇合起来构成的集. 换句话说,$\bigcup a$ 的元素就是a 的某个成员的元素:

$$x \in \bigcup a \leftrightarrow \exists t \in a(x \in t).$$

例 1　(1) $\bigcup\{s,t\}=\{x \mid x\in s \vee x\in t\}$，这个集常写成 $s\cup t$，以符合通常习惯.

(2) $\bigcup\{\{x,y\},\{z\}\}=\{x,y\}\cup\{z\}=\{u \mid u=x \vee u=y \vee u=z\}$，这个集简记为 $\{x,y,z\}$，叫做无序三元组. 类似，

$$\begin{aligned}\bigcup\{\{x,y,z\},\{v\}\} &= \{x,y,z\}\cup\{v\}\\ &= \{u \mid u=x \vee u=y \vee u=z \vee u=v\},\end{aligned}$$

这个集简记为 $\{x,y,z,v\}$，叫做无序四元组. 并集公理使我们可以得到元素越来越多的集.

(3) $\bigcup\{a,b,c\}=\{x \mid x\in a \vee x\in b \vee x\in c\}$，这个集按通常习惯仍记为 $a\cup b\cup c$. 类似写

$$\bigcup\{z,b,c,d\} = a\cup b\cup c\cup d.$$

(4) $\bigcup\varnothing=\varnothing, \bigcup\{\varnothing\}=\varnothing, \bigcup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}, \bigcup\{a\}=a$.

下面引进交集概念. 交集的形成不需要新的公理.

设 $a\neq\varnothing$，则集 a 的交集，用 $\bigcap a$ 表示，是指 a 的所有成员的全部公共元素的集

$$\bigcap a = \{x\in\bigcup a \mid \forall t\in a(x\in t)\}.$$

非空集 a 交集 $\bigcap a$ 是用内涵公理作为 $\bigcup a$ 的子集定义的.

按通常习惯，写

$$\bigcap\{s,t\} = \{x \mid x\in s \wedge x\in t\} = s\cap t,$$

$$\bigcap\{s,t,u\} = \{x \mid x\in s \wedge x\in t \wedge x\in u\} = s\cap t\cap u.$$

例 2　设 $a=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\},\{\{\varnothing\}\}\}$，则 $\bigcup a=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$，$\bigcap a=\{\{\varnothing\}\}$.

集 a 对集 b 的差，用 $a-b$ 表示，是作为 a 的子集用内涵公理定义的：

$$a-b=\{x\in a \mid x\notin b\},$$

定义中并不要求 b 是 a 的子集. 当 b 是 a 的子集时，$a-b$ 叫做 b 在 a 中的余集.

练习 1　填空：

(1) $A\cup\varnothing=$____.　(2) $A\cap\varnothing=$____.

(3) $A\cup A=$____.　(4) $A\cap A=$____.

(5) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)=$____ C.

(6) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)$____$(A\cap B)$.

(7) $(A-B)\cup C=((A\cup C)-B)$____$(B$ ____$C)$.

(8) $A-(B\cap C)=(A-B)____(A-C)$,

$A-(B\cup C)=(A-B)____(A-C)$ (De Morgan 律).

(9) $A-(B-(C-D))=(A-B)\cup((A____C)____D)$.

(10) 若 $B=A\cup B$,则 $A____B$.

(11) 若 $A=A\cap B$,则 $A____B$.

(12) 若 $A\subset B$,则 $(C-B)____(C-A)$.

(13) 若 $(A\cap B)\cup C-A=(A\cap B)-C$,则 $A____C____(A\cap B)$.

(14) 若 $(A\cup B)-C=(A-C)\cup B$,则 $B\cap C=____$.

下面的幂集公理可让我们由已知集以更快的速度形成更大的集.

ZF5(幂集公理(The Axiom of Power Set)) 设 a 为已知集,则

$$\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow x\subset a).$$

上式可简写为

$$\exists y(y=\{x\mid x\subset a\}),$$

或更简单地写为

$$\exists y(y=\mathscr{P}(a)).$$

ZF5 所断言存在的集 $\mathscr{P}(a)$ 叫做 a 的幂集,它由 a 的所有子集组成. 我们有

$$\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\},$$

$$\mathscr{P}(\{x,y\})=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}.$$

因为空集是任何集的子集,所以任何集的幂集都含有空集.

例 3 证明对任何集 a 都有:(1)$\bigcup\mathscr{P}(a)=a$,(2)$\mathscr{P}(\bigcup a)\supset a$.

(1)$x\in\bigcup\mathscr{P}(a)\leftrightarrow\exists t\in\mathscr{P}(a)(x\in t)\leftrightarrow\exists t\subset a(x\in t)\leftrightarrow x\in a$.

(2)$x\in a\rightarrow\forall y(y\in x\rightarrow y\in\bigcup a)\leftrightarrow x\subset\bigcup a\leftrightarrow x\in\mathscr{P}(\bigcup a)$.

此例说明:$\bigcup$ 与 $\mathscr{P}$ 是相反方向的运算. (2)的公式中 $\supset$ 不能改为 $=$,这是因为该式左边的集总含有 $\varnothing$ 这个元素,而 a 不一定含有 $\varnothing$ 这个元素.

练习 2 写出 $\{a,b,c\}$ 的所有子集. 集 $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ 的子集总共有多少个? 一般地,n 元集的子集总共有多少个?

练习 3 填空:

(1) 若 $\{a,b\}=\{a,b,c\}$,则__________.

(2) 若 $\{\{a,b\},c\}=\{\{a\},c\}$,则__________.

(3) 若 $\{\{a,b\},\{c\}\}=\{\{a\}\}$,则__________.

(4) 若 $\{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\}=\{\{\{c\},\varnothing\},\{\{d\}\}\}$,则__________.

(5) $\bigcup\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}=$__________.

(6) $\bigcup\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}=$__________.

(7) $\bigcap\bigcap\{\{a\},\{a,b\}\}=$ ________.

(8) $(\bigcap\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\})\bigcup(\bigcup\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\}-\bigcup\bigcap\{\{a\},\{a,d\}\})=$ ________.

(9) $\bigcap\{\mathscr{P}(\{\varnothing\}),\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{\varnothing\})),\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{\varnothing\})))\}=$ ________.

(10) $\bigcup(\mathbf{P}(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})-\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=$ ________.

(11) $\mathscr{P}(\bigcap a)$ ____ $\bigcap\{\mathscr{P}(b)\mid b\in a\}$.

(12) $\mathscr{P}(\bigcup a)$ ____ $\bigcup\{\mathscr{P}(b)\mid b\in a\}$.

(13) 设 $c=\{a-t\mid t\in b\}(b\neq\varnothing)$,则 $a-\bigcup b=$ ____ c, $a-\bigcap b=$ ____ c.

(14) $(\bigcup a)\bigcup(\bigcup b)$ ____ $\bigcup(a\bigcup b)$.

(15) $(\bigcap a)\bigcap(\bigcap b)$ ____ $\bigcap(a\bigcap b)$,设 $a\bigcap b\neq\varnothing$.

(16) $(\bigcap a)\bigcap(\bigcap b)=\bigcap(a$ ____ $b)$,设 $a\neq\varnothing, b\neq\varnothing$.

练习 4 设 $x\in a$ 且 $y\in b$. 证明 $(x,y)\in\mathscr{P}\mathscr{P}(a\bigcup b)$.

练习 5 分析以下语句之间的逻辑关系:

(1) $\forall x\forall y(y\in x\in a\rightarrow y\in a)$.　　(2) $\forall x\in a(x\subset a)$.

(3) $\forall x\in a(x\in\mathscr{P}(a))$.　　(4) $a\subset\mathscr{P}(a)$.

(5) $\bigcup a\subset a$.

思考题 1 是否存在集 a 满足 $\mathscr{P}(a)\subset a$?

思考题 2 能否由 $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$ 推出结论:

$$a = x,\ b = y, c = z?$$

思考题 3 为使 $\mathscr{P}(\bigcup a)=a$, a 要满足什么条件?

思考题 4 以下结论哪些是正确的?

(1) 若 $a\subset b$,则 $\mathscr{P}(a)\subset\mathscr{P}(b)$.　　(2) 若 $\mathscr{P}(a)\subset\mathscr{P}(b)$,则 $a\subset b$.

(3) 若 $\mathscr{P}(a)=\mathscr{P}(b)$,则 $a=b$.　　(4) $\mathscr{P}(a\bigcup b)=\mathscr{P}(a)\bigcup\mathscr{P}(b)$.

(5) $\mathscr{P}(a\bigcap b)=\mathscr{P}(a)\bigcap\mathscr{P}(b)$.　　(6) $\mathscr{P}(a-b)=\mathscr{P}(a)-\mathscr{P}(b)$.

(7) 若 $a\in b$,则 $\mathscr{P}(a)\in\mathscr{P}(b)$.　　(8) 若 $\mathscr{P}(a)\in\mathscr{P}(b)$,则 $a\in b$.

§3.5 关系与映射

任何一门特殊的科学,都是一门特殊的关系学. 集论所要研究的是集与集间的一般关系.

3.5.1 Cartesian 积集

在集论框架内表现数学,建立 Cartesian 积集的概念是重要一步. 形象地

说，Cartesian 积集是各种集关系表演的舞台.

Cartesian 积集是用有序对来定义的，不需要新的公理，但需要有下面的命题.

命题 1　$(x\in a\wedge y\in b)\rightarrow(x,y)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(a\cup b))$.

证　$(x\in a\wedge y\in b)\rightarrow\{x\},\{x,y\}\subset a\cup b$

$$\rightarrow\{x\},\{x,y\}\in\mathscr{P}(a\cup b)$$

$$\rightarrow\{\{x\},\{x,y\}\}\subset\mathscr{P}(a\cup b)$$

$$\rightarrow(x,y)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(a\cup b)).$$ □

命题 1 保证了下面的定义是合理的.

定义 1(Cartesian 积)　由集 a 与集 b 形成的 Cartesian 积集，用 $a\times b$ 表示，指集

$$a\times b=\{(x,y)\mid x\in a\ \wedge\ y\in b\}.$$

$a\times b$ 是集，因为它是作为 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(a\cup b))$ 这个集的子集用性质 $x\in a\vee y\in b$ 定义的，符合内涵公理的要求.

$a\times b$ 是由第一坐标取自 a，第二坐标取自 b 的所有那些有序对组成. 平面解析几何中的坐标平面为我们提供了一个直观的 Cartesian 积集的例子. 一般来说，$a\times b$ 与 $b\times a$ 是两个不同的集. 例如，当 $x\neq y$ 或 $x\neq z$ 时，下面两个集是不同的：

$$\{x\}\times\{y,z\}=\{(x,y),(x,z)\},$$

$$\{y,z\}\times\{x\}=\{(y,x),(z,x)\}.$$

练习 1　设 $a=\{x,y\},b=\{t,u,v\}$. 写出 $a\times b$ 与 $b\times a$.

练习 2　设 $a=\{x,y\},b=\{t\},c=\{u,v\}$. 写出 $a\times(b\times c)$ 与 $(a\times b)\times c$.

练习 3　以下结论对吗？

(1) $a\times(b\cup c)=(a\times b)\cup(a\times c)$.

(2) $a\cup(b\times c)=(a\cup b)\times(a\cup c)$.

(3) $a\times(b\cup c)=(a\times b)\cup(a\times c)$.

(4) $a-(b\times c)=(a-b)\times(a-c)$.

(5) 若 $a\subset c\wedge b\subset d$，则 $a\times b\subset c\times d$.

(6) 若 $a\times b\subset c\times d$，则 $a\subset c\wedge b\subset d$.

3.5.2　关系

用什么办法来表现数学中各种对象之间形形色色的具体关系？我们从集之间最一般的抽象关系开始.

定义 2(关系(relation)) 若 $r\subset a\times b$,则把 r 叫做 a 对 b(或 a 到 b)的一个关系.

这是一个十分简单的定义. 集 a 对集 b 的一个关系是由若干有序对组成的,这些有序对的第一坐标取自 a,第二坐标取自 b. 若把 $a\times b$ 想象成一个平面,则 a 对 b 的一个关系 $r(\subset a\times b)$ 就是这个平面的某个部分.

因 $\varnothing\subset a\times b$,故 $\varnothing$ 也是一个关系,是 a 对 b 的最小关系. a 对 b 的最大关系是 $a\times b$.

有时把 $(x,y)\in r$ 写成 xry 或 $r(x,y)$. $(x,y)\notin r$ 时,说 $r(x,y)$ 不成立. 关系 $r\subset a\times b$ 的定义域(domain)用 $\mathrm{Dom}(r)$ 表示,值域(range)用 $\mathrm{Ran}(r)$ 表示,分别是指:

$$\mathrm{Dom}(r)=\{x\in a\mid \exists y\in b(x,y)\in r\},$$
$$\mathrm{Ran}(r)=\{y\in b\mid \exists x\in a\ (x,y)\in r\}.$$

设 $r\subset a\times b$. r 的逆关系(inverse)用 r^{-1} 表示,指

$$r^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in r\}.$$

我们有 $\mathrm{Dom}(r^{-1})=\mathrm{Ran}(r)$, $\mathrm{Ran}(r^{-1})=\mathrm{Dom}(r)$.

设 $r\subset a\times b$ 且 $c\subset a$. 关系 r 在 c 上的限制(restriction)用 $r\upharpoonright c$ 表示,指

$$r\upharpoonright c=\{(x,y)\in r\mid x\in c\}.$$

$r\upharpoonright c$ 也是一个关系,是 c 对 b 的一个关系. $r\upharpoonright c$ 将 r 的定义域缩小到 c 的范围内,即:

$$\mathrm{Dom}(r\upharpoonright c)=\mathrm{Dom}(r)\cap c.$$

有时把 $\mathrm{Ran}(r\upharpoonright c)$ 记作 $r[c]$,叫做 c 在关系 r 之下的像. 我们有

$$r[c]=\{y\in b\mid \exists x\in c(x,y)\in r\}.$$

设 $r\subset a\times b$, $s\subset b\times c$. a 对 b 的关系 r 与 b 对 c 的关系 s 的复合(composition),用 $s\circ r$ 表示,是用下式定义的:

$$s\circ r=\{(x,z)\mid \exists y((x,y)\in r\wedge (y,z)\in s)\}.$$

$s\circ r$ 是 a 对 c 的关系. 我们有 $(s\circ r)^{-1}=r^{-1}\circ s^{-1}$. 事实上,

$$\begin{aligned}(s\circ r)^{-1}&=\{(z,x)\mid (x,z)\in s\circ r\}\\&=\{(z,x)\mid \exists y((x,y)\in r\wedge(y,z)\in s)\}\\&=\{(z,x)\mid \exists y((y,x)\in r^{-1}\wedge(z,y)\in s^{-1})\}\\&=\{(z,x)\mid \exists y((z,y)\in s^{-1}\wedge(y,x)\in r^{-1})\}\\&=r^{-1}\circ s^{-1}.\end{aligned}$$

例 1 设 $a=\{t,u,v\}$, $b\{w,x,y,z\}$,且 t,u,v 各不相同, w,x,y,z 各不相同. 因 $a\times b$ 有 12 个元素,故 a 对 b 的关系总共有 $2^{12}=4096$ 个. ($a\times b$ 有 2^{12} 个不同的子集.)下面是 a 对 b 的关系的几个特例:

$$r_1=\{(v,y),(v,w),(u,z)\},$$
$$r_2=\{(t,w),(t,x),(u,y),(v,y)\},$$
$$r_3=\{(t,y),(u,w),(v,z)\},$$
$$r_4=\{(t,x),(u,x),(v,w)\}.$$

我们有

$\mathrm{Dom}(r_1)=\{v,u\}$, r_2,r_3,r_4 的定义域都是 a;

$\mathrm{Ran}(r_1)=\mathrm{Ran}(r_3)=\{w,y,z\}$, $\mathrm{Ran}(r_2)=\{w,x,y\}$, $\mathrm{Ran}(r_4)=\{w,x\}$;

$r_1^{-1}=\{(y,v),(w,v),(z,u)\}$.

若取 $c=\{t,v\}$,则有

$$r_1\restriction c=\{(v,y),(v,w)\},\qquad r_1[c]=\{w,y\};$$
$$r_2\restriction c=\{(t,w),(t,x),(v,y)\},\qquad r_2[c]=\{w,x,y\};$$
$$r_3\restriction c=\{(t,y),(v,z)\},\qquad r_3[c]=\{y,z\};$$
$$r_4\restriction c=\{(t,x),(v,w)\},\qquad r_4[c]=\{w,x\}.$$

若取 $c=\{\alpha,\beta\}$, $s=\{(w,\alpha),(y,\alpha),(y,\beta),(z,\beta)\}$,则有

$$s\circ r_2=\{(t,\alpha),(u,\alpha),(u,\beta),(v,\alpha),(v,\beta)\},$$
$$s\circ r_4=\{(v,\alpha)\}.$$

例 1 里四个特殊的 a 对 b 的关系中,r_2,r_3 与 r_4 具有性质

$$\forall x\in a\,\exists y\in b\,(x,y)\in r_i,\ i=2,3,4,$$

其中 r_3,r_4 又与 r_2 不同,进一步还满足"单值性":

$$\forall x\in a\,\exists!y\in b\,(x,y)\in r_i,\ i=3,4.$$

练习 1 设 $a=\{x,y,z\}$, $b=\{t\}$. 写出 a 到 b 的所有关系.

练习 2 设 $r_1,r_2\subset a\times b$. 填空:

(1) $(r_1\cup r_2)^{-1}=r_1^{-1}$ ____ r_2^{-1}. (2) $(r_1\cap r_2)^{-1}=r_1^{-1}$ ____ r_2^{-1}.

练习 3 设 $r\subset a\times b$, $c_1,c_2\subset a$. 填空:

(1) $r[c_1\cup c_2]$ ____ $r[c_1]\cup r[c_2]$. (2) $r[c_1\cap c_2]$ ____ $r[c_1]\cap r[c_2]$.

(3) $r[c_1-c_2]$ ____ $r[c_1]-r[c_2]$. (4) $r^{-1}[r[c_1]]$ ____ c_1.

练习 4 设 $r\subset a\times b$, $\mathrm{Dom}(r)=\{t,u,v\}\subset a$, $\mathrm{Ran}(r)=\{y,z\}\subset b$. 填空:

(1) $r^{-1}\circ r\supset$ ________. (2) $r\circ r^{-1}\supset$ ________.

3.5.3 映射(函数)

函数作为分析数学的研究对象,是从 17 世纪起在对各种运动问题的研究中逐渐形成的. 1692 年,Leibniz 最早采用了"函数"这个术语. 在一段时间

内，函数这个概念比较模糊．Euler 于 1743 年引进了记号 $f(x)$，并明确地把函数理解为"解析表达式"．Dirichlet 于 1829 年提出了变量间对应规律的函数概念，至今仍在数学书中经常使用．现代数学中，函数这个基本数学概念已在集论的框架内更为精确地得到一般化，从而大大拓宽了它的适用范围．对此有人评论："用集论将函数概念一般化，标志着数学史上的一个里程碑．"[69]

定义 3(映射(mapping)) 若 a 对 b 的关系 $f(\subset a\times b)$ 具有性质：

$$\forall x\in a\,\exists!y\in b\ ((x,y)\in f),$$

则 f 叫做 a 到 b 的映射(或函数 function)．

f 是 a 到 b 的映射，记作 $f:a\to b$．$(x,y)\in f$ 按习惯写成 $y=f(x)$，这时 y 叫做 x 在 f 之下的像(或值)，x 叫做 y 在 f 之下的原像．

a 到 b 的映射 f 是一种特殊的关系，是以 a 为定义域且在 b 中取值的单值性关系，即 f 满足：

(i) $f\subset a\times b$，

(ii) $\mathrm{Dom}(f)=a$，

(iii) $(x,y_1)\in f\wedge(x,y_2)\in f\to y_1=y_2$(单值性)．

上面例 1 写出的四个 a 对 b 的关系中，r_3 与 r_4 是映射，但 r_1 与 r_2 不是．r_1 与 r_2 不满足映射的"单值性"要求 (r_1 还不满足(ii))．

注意，a 到 b 的映射 f 的值域不要求是整个取值范围 b，它可以是 b 的一部分：$\mathrm{Ran}(f)\subset b$，或 $f[a]\subset b$．若 $f[a]=b$，则称 f 为满射(surjection)．

映射的单值性要求在映射之下一点只有一个像，但并不要求一个像只能有一个原像，即允许不同的点有相同的像．

若在 a 到 b 的映射 f 之下 a 的不同元素的像各不相同，即

$$\forall x_1,x_2\in a(x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)),$$

则称 f 是单射(injection)，或说 f 是一对一映射．

例 1 中的 r_3 与 r_4 都是映射，但 r_3 是单射而 r_4 不是单射．

由 $f:a\to b$ 与 $g:b\to c$ 可得到一个 a 到 c 的映射，叫做 f 与 g 的复合，用 $g\circ f$ 表示，它是用下式定义的：

$$g\circ f(x)=g(f(x)),\quad x\in a.$$

易知单射与单射的复合也是单射．

映射 f 的逆关系 $f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\}$ 不一定是映射．但若 f 是 a 到 b 的单射，则 f^{-1} 满足单值性条件，是 $\mathrm{Ran}(f)$ 到 a 的映射．这个映射 f^{-1} 叫做 f 的逆映射或反函数．

若 $f:a\to b$ 既是单射又是满射，则叫做 a 到 b 的双射(bijection)．这时 a 中每个元素都在 b 中有一个像，且只有一个像(因 f 是映射)；b 中每个元素都

在a中有一个原像(因f是满射),且只有一个原像(因f是单射). 这时以下两式都成立:

$$\forall x \in a\, \exists ! y \in b\ (x,y) \in f,$$

$$\forall y \in b\, \exists ! x \in a\ (x,y) \in f,$$

后式说明f^{-1}也是双射,是b到a的双射. 易知两个双射的复合也是双射.

设$c \subset a$. 若g是$f: a \to b$(作为a对b的关系)在c上的限制,即$g = f \upharpoonright c$,则g是c到b的映射,且有

$$\forall x \in c\ (g(x) = f(x)),$$

此时f叫做g的扩张.

注意,这里映射即函数的定义的特点. 按通常对函数的理解,函数是一种对应规律,是自变量与因变量之间的对应规律. 现在的定义撇开了这种对应规律的具体涵义,而仅抓住对应关系的外延——所有由x("输入")和y("输出")组成的属于f的有序对(x,y).

常用符号${}^a b$表示a到b的映射的全体:

$${}^a b = \{f \mid f: a \to b\}.$$

${}^a b$是集,因为${}^a b \subset \mathscr{P}(a \times b)$. 显然,当$b \subset c$时${}^a b \subset {}^a c$.

注　对函数概念应作一点说明. 按定义,f是a到b的函数,指f是以a为定义域的一个a到b的单值性关系. 此时如果设$b \subset B$且$b \neq B$,那么同一个函数f又可看成是a到B的函数,因为f同时又是以a为定义域的a到B的单值关系($f \subset a \times b$蕴涵$f \subset a \times B$). 问题是:前后两种情形的f是同一个函数吗? 当$f: a \to b$是满射时,$f: a \to B$不是满射,但f却是同一个集. 好在日常数学中,上述差异并不产生严重问题. 有问题时可以改进定义,例如用有序对(f,b)来表示函数,其中f是以$\mathrm{Dom}(f)$为定义域且在b中取值的单值性关系.

练习1　设$f = \{(\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}), (\{\varnothing\}, \varnothing)\}$. 填空:

(1) $\mathrm{Dom}(f) =$____.　(2) $\mathrm{Ran}(f) =$____.　(3) $f(\varnothing) =$____.

(4) $f(\{\varnothing\}) =$____.　(5) $f[\{\varnothing\}] =$____.　(6) $f \upharpoonright \varnothing =$____.

(7) $f \upharpoonright \{\varnothing\} =$____.　(8) $f \upharpoonright \{\varnothing, \{\varnothing\}\} =$____.

练习2　设$a = \{x_1, x_2\}, b = \{t, u, v\}$. a对b的关系有多少个? 用表列出所有a到b的映射. 其中满射与单射各有多少个?

练习3　设$a = \{x_1, x_2, x_3\}, b = \{u, v\}$. a对b的关系有多少个? 用表列出所有a到b的映射. 其中满射与单射各有多少个?

练习4　设$f: a \to b, a_1, a_2 \subset a, b_1, b_2 \subset b$. 填空:

(1) $f[a_1 \cup a_2]$____$f[a_1] \cup f[a_2]$.

(2) $f[a_1 \cap a_2]$____ $f[a_1] \cap f[a_2]$.

(3) $f[a_1 - a_2]$ ____ $f[a_1] - f[a_2]$.

(4) $f^{-1}[b_1 \cup b_2]$____ $f^{-1}[b_1] \cup f^{-1}[b_2]$.

(5) $f^{-1}[b_1 \cap b_2]$____ $f^{-1}[b_1] \cap f^{-1}[b_2]$.

(6) $f^{-1}[b_1 - b_2]$____ $f^{-1}[b_1] - f^{-1}[b_2]$.

(7) $f^{-1}[f[a_1]]$____ a_1.

(8) $f[f^{-1}[b_1]]$____ b_1.

练习 5 设 $a = \{x_1, x_2, x_3\}$. 填空:

(1) ${}^a a$ 有____个元素.

(2) 设 $b = \{t_1, t_2\}(t_1 \neq t_2)$. 写出 ${}^b a$ 的全部元素.

(3) ${}^{\varnothing} a =$ ________.

(4) ${}^a \varnothing =$ ________.

* **思考题 1** 能建立 a 到 $\mathscr{P}(a)$的双射吗?

3.5.3 附 单值化原则

我们是用"关系"来定义"函数"的. 每个函数都是某个单值性的关系,要求函数是单值的,这是数学研究与应用的需要. 对于任意一个 a 对 b 的关系 $r \subset a \times b$,即使 $\mathrm{Dom}(r) = a$, r 也不一定是个 a 到 b 的函数;这是因为 r 不一定具有单值性,即 r 不一定具有性质:

$$\forall x \in a \ \exists ! y \in b \ (x, y) \in r.$$

让我们考察下面的一条原则:

单值化原则 *对任意关系 $r \subset a \times b$,若它的定义域 $\mathrm{Dom}(r) = a$,则 r 可以单值化成为以 a 为定义域的函数,即存在 a 到 b 的函数 $f \subset r$.*

这条原则允许把一个非单值性的关系 r"切削"成一个函数 f. 做法可以是这样:a 中任一点 x,若在 r 之下对应于不止一个值(像),那么从这些值中任选出一个代表作为函数值 $f(x)$即可.

为了具体理解单值化原则的涵义,让我们回到 3.5.2 例 1,考察例 1 中的关系 r_2:

$$r_2 = \{(t, w), (t, x), (u, y), (v, y)\}.$$

r_2 不是 a 到 b 的函数(这里 $a = \{t, u, v\}, b = \{w, x, y, z\}$),这是因为 r_2 不具有单值性,它的定义域 a 中的点 t 在 b 中同时有两个像:w 与 x(即同时有 $(t, w) \in r_2, (t, x) \in r_2$). 现为了单值化,可选择两个像中的一个(随便哪一个),例如选择 w,去掉 x,即在 r_2 中保留(t, w),去掉(t, x),便得到 r_2 的一

个子集 f：

$$f = \{(t,w),(u,y),(v,y)\},$$

这个 f 现在具有单值性，从而成为 a 到 b 的函数. 这个例子涉及的只是有限集，单值化是不成问题的. 一般情形，问题就不这样简单.

单值化原则是选择公理的一种形式，历史上曾出现过关于其合法性的争论. 数学实践中，选择公理现已被广泛接受. 关于选择公理的讨论参见 4.1.3 及第九章.

§3.6 无限公理

数学以抽象的形式从量的方面研究现实世界中的变化规律. 这种研究要精确地进行，不能局限于有限；局限于有限，数学走不了多远. 前面介绍的 ZF 的前五条公理(外延公理、内涵公理、无序对公理、并集公理与幂集公理)为我们提供的是有限数学的框架. 要走出这个框架，需要有新公理用来肯定无限集的存在.

3.6.1 最小归纳集 ω

我们首先引进集的后继运算.

定义 1(后继(successor)) 集 x 的后继，用 x' 表示，指集

$$x' = x \cup \{x\}.$$

这就是说，在集 x 中再加入一个新元素——x 自己，得到的新集就是 x 的后继 x'.

例如，我们可以一个接着一个的写出：

$$\varnothing' = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\},$$
$$\varnothing'' = \varnothing' \cup \{\varnothing'\} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\},$$
$$\varnothing''' = \varnothing'' \cup \{\varnothing''\} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\cdots$$

这个过程可以无止境地无限延续下去. 但这里说的无限还只是一种潜无限.

后继集具有性质：

(i) $x' \neq \varnothing$,

(ii) 若 $t \in x'$，则 $t \in x \vee t = x$,

(iii) $x \subset x'$.

定义 2(归纳集(inductive set)) 满足下面条件的集 a 叫做归纳集：

1° $\varnothing \in a$,

2° 若 $x \in a$，则 $x' \in a$.

归纳集有没有？这不是一个简单的问题，前面的公理无法回答，整个逻辑也无法回答. 断言它的存在，需要有一条新公理，这条公理已成为整个数学理论的重要基石.

ZF6(无限公理(The Axiom of Infinity)) *归纳集是存在的，即：*

$$\exists s(\varnothing \in s \land \forall x(x \in s \to x' \in s)).$$

现设 s 是一个归纳集(无限公理断言它是存在的). 有了这个任意取定的归纳集 s，可以利用内涵公理作出下面重要的集 ω：

$$\omega = \{x \in s \mid x \in \text{每个归纳集}\}.$$

显然 ω 这个集具有性质：

$$\omega \subset \text{每个归纳集}.$$

命题 1 ω 是最小的归纳集.

证 只用证 ω 是归纳集就可以了，因为上面已指出 ω 包含于每个归纳集，即 ω 具有最小性.

由定义 2 中的条件 1° 知 $\varnothing \in$ 每个归纳集(包括 s)，故由 ω 的定义知 $\varnothing \in \omega$.

剩下要证：若 $x \in \omega$，则 $x' \in \omega$. 事实上，

$x \in \omega \to x \in$ 每个归纳集，且 $x \in s$(由 ω 的定义)

$\to x' \in$ 每个归纳集(由定义 2 中的条件 2°)，其中也包括 $x' \in s$

$\to x' \in \omega$(由 ω 的定义).

ω 具有定义 2 中的性质 1°与 2°，所以是归纳集. □

ω 这个最小的归纳集是我们在集论中遇到的第一个实无限. 有了无限公理 ZF6，集论便进入了实无限的领域. 实无限(无限集)"是现代数学的基本工具，是集论的本质."[70]

为了深入认识 ω 这个集，我们要引入可递集的概念. 这个概念在集论中，特别是在序数理论中起着重要作用.

定义 3(可递集(transitive set)) x 是可递集，指 x 满足：x 的元素的元素都还是 x 的元素，即

$$y \in t \in x \to y \in x.$$

可递集 x 满足的上述条件可写成以下几种等价形式：

$$\forall t \in x\ (t \subset x),$$

$$\forall t \in x(t \in \mathscr{P}(x)),$$

$$x \subset \mathscr{P}(x),$$

$$\bigcup x \subset x.$$

可递集是存在的，而且很多. 例如：

$\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\},\cdots$ 非可递集也是存在的，也很多. 例如 $\{\{\varnothing\}\}$ 就不是可递集，因为

$$\varnothing\in\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}，但\varnothing\notin\{\{\varnothing\}\}.$$

集 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\}$ 也不是可递集，因为该集中缺少 $\{\{\varnothing\}\}$ 这个元素.

下面的命题 2 告诉我们，可递集关于后继这个集运算是封闭的.

命题 2　若 x 是可递集，则它的后继 x' 也是可递集.

证　设 $y\in t\in x'(=x\cup\{x\})$. 下证 $y\in x'$ 即可.

情形 1，$t\in x$. 已知 x 是可递集，故 $y\in x$，进而 $y\in x'$（注意 $x\subset x'$）.

情形 2，$t=x$. 此时 $y\in t$ 即 $y\in x$，也有 $y\in x'$. □

可递集的后继还是可递集，但反过来，并非每个可递集一定是某集的后继. 前面举的可递集的例子中，$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ 就不是任何集的后继.

由空集 $\varnothing$ 开始，我们用求后继的方法可以得到一串可递集：

$$\varnothing,\varnothing',\varnothing'',\varnothing''',\cdots.$$

这些集的前几个已经在定义 1 后具体写出过. 按归纳集的定义，这些集都是所有归纳集的成员；特别，它们是 ω 的成员，因为我们知道 ω 是归纳集（命题 1）.

ω 这个最小的归纳集除了含有上面一串可递集外，是否含有非可递集？下面的命题回答了这个问题，并使我们对 ω 这个集有了进一步认识.

命题 3　ω 的元素都是可递集.

证　作集 $\alpha=\{x\in\omega\mid x$ 是可递集$\}$. 现证 α 是归纳集.

1°　$\varnothing\in\alpha$（因 $\varnothing\in\omega$ 且 $\varnothing$ 是可递集），

2°　$x\in\alpha\rightarrow x\in\omega$ 且 x 是可递集

$\rightarrow x'\in\omega$（因 ω 是归纳集）且 x' 是可递集（命题 2）

$\rightarrow x'\in\alpha$（α 的定义）.

所以 α 是归纳集，且 $\alpha\subset\omega$. 由 ω 的最小性知 $\alpha=\omega$，这说明 ω 的元素都是可递集. □

集论发展中一个常让人思考的问题是：$x\in x$ 可能吗？按照 §3.2 的最后我们谈起过的关于形成集合的“盖房子”观点，$x\in x$ 是不合理的. 盖房子所用材料必须是房子盖好之前已经有的材料. 集 x 形成之前，不能用尚未形成的集作为集 x 的成员，所以总有 $x\notin x$. 但是至今已有的公理（ZF1～ZF6）还不能让我们严格证明这一点. 值得注意的是，现在可以对 ω 的所有成员来证明

这件事：

命题 4 $\forall x\in\omega(x\notin x)$.

证 作集 $\beta=\{x\in\omega\mid x\notin x\}$，只用证 $\beta=\omega$ 便可. 先证 β 也是归纳集.

1° $\varnothing\in\beta$. 这是因为 $\varnothing\in\omega$(已证 ω 是归纳集)且 $\varnothing\notin\varnothing$.

2° 设 $x\in\beta$，即(按 β 定义)：

$$x\in\omega \text{ 且 } x\notin x. \tag{1}$$

因 ω 是归纳集，故 $x'\in\omega$. 剩下要证 $x'\notin x'$(从而 $x'\in\beta$).

反设 $x'\in x'(=x\cup\{x\})$. 于是有两种可能：

(i) $x'=x$，此时 $x\in x$，与(1)矛盾.

(ii) $x'\in x$，此时由 $x\in x'\in x$ 知 $x\in x$，也与(1)矛盾. (注意由命题 3 知 x 是可递集.)

至此已证 β 是归纳集，且 $\beta\subset\omega$. 由 ω 的最小性知 $\beta=\omega$. □

由命题 3 及命题 4 可证明下面的命题 5.

命题 5 $\forall x,y\in\omega(x\neq y\rightarrow x'\neq y')$.

证 设 $x\neq y$. 反设 $x'=y'$(即 $x\cup\{x\}=y\cup\{y\}$)，由此可得：

(i) $x\in y$(因 $x\in x'=y'$ 但 $x\neq y$)，

(ii) $y\in x$(因 $y\in y'=x'$ 但 $y\neq x$).

由命题 3 知 x 是可递集，(i)与(ii)合起来便得 $x\in x$，这与命题 4 矛盾. □

现在可以总结一下 ω 这个最小归纳集的性质.

定理 1 集 ω 具有以下性质：

1° $\varnothing\in\omega$，

2° 若 $x\in\omega$，则 $x'\in\omega$，

3° $x'\neq\varnothing$，

4° $\forall x,y\in\omega(x\neq y\rightarrow x'\neq y')$，

5° 设 $a\subset\omega$ 满足：

(i) $\varnothing\in a$，

(ii) $x\in a\rightarrow x'\in a$，

则 $a=\omega$.

证 1°与 2°由命题 1 及定义 2 即得.

3° 由后继集的定义即得.

4° 即命题 5.

5° 的已知条件说明 a 是归纳集，由 ω 的最小性(命题 1)便得 $a=\omega$. □

如果我们规定

$$0 = \varnothing,$$

那么定理1说明,ω 具有自然数 Peano 公理(参见1.2.3(三))所规定的全部性质,这些性质现在是从 ZF 的前6条公理出发证明出来的. 所以我们把 ω 这个最小归纳集叫做自然数集,ω 的元素叫做自然数. 这样,我们便在 ZF 的框架内来到了古典数学的源头. 由定理1中 ω 所具有的性质(即 Peano 公理)出发,可以建立自然数的各种熟知的运算和性质(参见1.2附3).

历史上,由 Peano 公理所确定的自然数集 **N** 是抽象的,而这里我们得到的 ω 这个自然数集是具体的. 关于自然数,我们从抽象走到了具体. 无限公理(ZF6)的引入,无非是为了肯定 ω 这个集作为整体的存在性.

ω 的形象是:

$$\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\cdots.$$

因为我们已将 $\varnothing$ 记为0,上面的自然数串仍可写成

$$0,1,2,3,\cdots.$$

不同的是,现在的自然数有了集的构造:

$$\begin{aligned}
&0=\varnothing\\
&1=0'=0\cup\{0\}=\{0\},\\
&2=1'=1\cup\{1\}=\{0,1\},\\
&3=2'=2\cup\{2\}=\{0,1,2\},\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

对于用集表示的自然数,我们已有了下面的初步认识:

(1) 它们全体构成最小归纳集.

(2) 它们都是可递集.

(3) 它们都具有 $\in$ 反自反性,即 $\forall x\in\omega(x\notin x)$.

(4) 整体上满足 Peano 公理.

无限公理合理吗? 人类的数学实践对此早已作了肯定的回答. 古典分析数学的基石——数学归纳法毫无争议地被普遍使用这一事实便能说明问题. 使用数学归纳法所达到的认识是关于全体自然数的整体性认识. 这一方法使人们超越了有限,达到了无限.

Poincare 曾抱有直觉主义的某些主张,对集论曾心存疑虑. 但他在谈到数学归纳法时曾说:

“在算术领域,……数学无穷的观念已经起着举足轻重的作用,没有它便没有科学,因为没有它就不会有普遍的东西.”“棋手能够预料四、五步棋,不管他多非凡,他也只能准备有限步棋;假使把他的本领用于算术,他也不能凭借单一的直接直觉洞察算术的普遍真理;为了获得最普遍的定理,他也不得不借

助于递归推理,因为这是能使我们从有穷通向无穷的工具."[71]

在集论系统中,随着理论的展开,我们对自然数的性质将会有更多更深入的认识. 但应明确,在日常数学活动中,人们一般使用的自然数是抽象的自然数,是满足 Peano 公理的自然数集的成员. 本书中,我们在符号的使用上是有差别的:有时我们用 **N** 表示自然数集,这是在做通常数学时用的抽象的自然数集,表明我们是在做一般数学;有时我们用 ω 表示自然数集,这是集论中具体的自然数集,表明我们要对 ω 作进一步的集论研究. 一般书中,对符号 **N** 与 ω 不作区分.

现在我们引进可数集的概念,关于可数集的详细讨论留到以后章节.

定义 4(有限集,无限集,可数集) 与某个自然数 $n\in\omega$ 能建立双射的集叫做有限集(finite set). 不是有限集的集叫做无限集(infinite set). 与自然数集 ω 能建立双射的集叫做可数集或可列集(countable set, enumerable set).

有限集与可数集统称至多可数集. 有时把至多可数集叫做可数集(一般数学书上往往都这样做),这时就把定义 4 中的可数集叫做可数无限集.

空集是有限集. 非空有限集可表示成$\{a_0,\cdots,a_{n-1}\}$. 可数集可表示成

$$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

其中的项各不相同(即元素不重复出现).

定义 5(序列(sequence)) 函数 $f:n\to a$ 叫做 a 的元素的有限序列,函数 $f:\omega\to a$ 叫做 a 的元素的无限序列.

有限序列常表示成

$$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\quad(\text{或}\langle a_i\mid i\in n\rangle),$$

无限序列可表示成

$$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots(\text{或}\langle a_i\mid i\in\omega\rangle,\langle a_i\rangle_{i=0}^{\infty},\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\text{等}),$$

注意序列中的元素可以重复出现.

练习 1 填空:

(1) 设 $a=\{\{2,5\},4,\{4\}\}$,则$\bigcap(\bigcup a-4)=$________.

(2) $\bigcap\bigcup(\mathscr{P}(2)-2)=$________.

(3) 设 $a=\{\{\{1,2\},\{1\}\},\{\{1,0\}\}\}$,则

$\bigcup a=$____ $\bigcap a=$____ $\bigcup\bigcup a=$____ $\bigcap\bigcap a=$____ $\bigcup\bigcap a=$____ $\bigcap\bigcup a=$____.

(4) 设 $a=\{\{1,2\},\{2,0\},\{1,3\}\}$,则

$\bigcup a=$____ $\bigcap a=$____ $\bigcup\bigcup a=$____ $\bigcap\bigcap a=$____ $\bigcup\bigcap a=$____ $\bigcap\bigcup a=$____.

练习 2 分别作函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$(用公式给出 $f(n)$或用其他方式定义),使之具有性质:

(1) f 既非单射又非满射.

(2) f 是非满射的单射.

(3) f 是非单射的满射.

(4) f 是双射,且满足 $f(n) \neq n$.

(上面作出的四个函数是很大的函数空间 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 中四个不同的点.)

练习 3 设 $a \cup b = \omega, a \cap b \neq \varnothing, f \in {}^{a}\omega, g \in {}^{b}\omega$. 若 $f \cup g \in {}^{(a \cup b)}\omega$,则 f 与 g 要满足什么条件?

练习 4 设 $F \subset \mathscr{P}(\mathbf{N})$. 如果 F 满足:

1° $\varnothing \notin F, \mathbf{N} \in F$,

2° 若 $a, b \in f$,则 $a \cap b \in F$,

3° 若 $a \subset b \subset \mathbf{N}$ 且 $a \in F$,则 $b \in F$,

那么 F 叫做 $\mathbf{N}$ 上的一个滤子(filter).

(1) 试给出具体的 $\mathbf{N}$ 上的滤子.

(2) 给出 $\mathbf{N}$ 上滤子 F 使之进一步具有性质 4°:

4° $\forall a \subset \mathbf{N}(a \in F \vee (\mathbf{N} - a) \in F)$. (这时 F 叫做 $\mathbf{N}$ 上的超滤.)

(3) 给出 $\mathbf{N}$ 上滤子 F 使之具有性质 5°:

5° $\mathbf{N}$ 的任一有限子集 $\notin F$.

* **思考题 1** 能否给出一个 $\mathbf{N}$ 上滤子 F 同时具有练习 4 中的性质 4° 与 5°?

3.6.2 归纳定义

本段的主要任务是证明下面的定理 1,这个定理常被称为递归定理. 自然数的加法,乘法等许多运算的定义都以这个定理为依据(参见 1.2 附 3 的定义 1 与定义 2). 如果感到困难,定理的证明可暂时放过,先承认它并了解这个定理的应用,后面需要时再回到定理的证明.

本段中 n' 仍表示 n 的后继.

定理 1 (归纳定义或递归定义的合理性)

设集 a 与函数 $h: a \to a$ 皆为已知,且 $x_0 \in a$,则惟一存在函数 $f: \omega \to a$ 满足条件:

$$\begin{cases} f(0) = x_0, & (1) \\ f(n') = h(f(n)). & (2) \end{cases}$$

定理的结论是说:递推条件(1)与(2)惟一地确定了一个 ω 到 a 的函数 f. 在证明这个定理之前,先来看它的应用实例.

例 1 取定理 1 的 $a = \omega, x_0 = m \in \omega$,并取由下式定义的 h:

$$h(n) = n'. \tag{3}$$

按定理 1 的结论,惟一存在函数 $f:\omega\to\omega$ 满足条件:

$$f(0)=m, \quad (\text{注意 } x_0 \text{ 取为 } m)$$
$$f(n')=h(f(n)) \quad (\text{由}(2))$$
$$=(f(n))'. \quad (\text{由}(3))$$

这里惟一存在的函数 f 与取定的值 m 有关系,我们把它改记为 f_m:

$$\begin{cases} f_m(0)=m, & (4)\\ f_m(n')=(f_m(n))'. & (5)\end{cases}$$

每个自然数 m 都对应有自己的 f_m,这个 f_m 的惟一存在性是定理 1 保证的.这就保证了用下面方式定义的自然数的加法是合理的:

$$m+n=f_m(n). \tag{6}$$

按照这个规定,自然数的加法具有性质:

$$m+0=f_m(0) \quad (\text{由}(6))$$
$$=m, \quad (\text{由}(4))$$
$$m+n'=f_m(n') \quad (\text{由}(6))$$
$$=(f_m(n))' \quad (\text{由}(5))$$
$$=(m+n)'. \quad (\text{由}(6))$$

这性质正是我们在 1.2 附 3 中介绍过的用来定义加法的性质. 定理 1 以一般的形式给出了这种用递推方式来定义运算的合理性.

例 2 在定理 1 中,取 $a=\omega, x_0=0$;对任意取定的自然数 m,令

$$h(n)=n+m. \tag{7}$$

按照定理 1,惟一存在与 m 有关的函数 $f_m:\omega\to\omega$ 满足

$$f_m(0)=0, \quad (\text{由}(1), x_0=0) \tag{8}$$
$$f_m(n')=h(f_m(n)) \quad (\text{由}(2))$$
$$=f_m(n)+m. \quad (\text{由}(7)) \tag{9}$$

这就保证了用下面方式定义的自然数的乘法是合理的:

$$m\cdot n=f_m(n). \tag{10}$$

按照这个规定,自然数的乘法具有性质:

$$m\cdot 0=f_m(0) \quad (\text{由}(10))$$
$$=0, \quad (\text{由}(8))$$
$$m\cdot n'=f_m(n') \quad (\text{由}(10))$$
$$=f_m(n)+m \quad (\text{由}(9))$$
$$=m\cdot n+m. \quad (\text{由}(10))$$

这性质正是 1.2 附 3 中用来定义乘法的性质.

思考题1　应用定理1说明自然数运算 m^n 可用下面的递推条件合理地规定：

$$\begin{cases} m^0 = 1, \\ m^{n'} = m^n \cdot m. \end{cases}$$

现在我们来完整地证明定理1，即证明满足条件(1)与(2)的函数 f 的惟一存在性.

惟一性的证明　对已知的集 a，函数 $h:a\to a$ 及 $x_0\in a$，假设除存在满足条件(1)，(2)的函数 $f:\omega\to a$ 之外，还存在函数 $g:\omega\to a$ 满足：

$$\begin{cases} g(0) = x_0, & (11) \\ g(n') = h(g(n)). & (12) \end{cases}$$

为证惟一性，只用证 $\forall n\in\omega(f(n)=g(n))$. 对 n 归纳：$n=0$ 时，

$$\begin{aligned} f(0) &= x_0 & (\text{由}(1)) \\ &= g(0); & (\text{由}(11)) \end{aligned}$$

设 $f(n)=g(n)$，则

$$\begin{aligned} f(n') &= h(f(n)) & (\text{由}(2)) \\ &= h(g(n)) & (\text{由归纳假设}) \\ &= g(n'). & (\text{由}(12)) \end{aligned}$$

于是 $f=g$. 惟一性证毕.

存在性的证明　对已知的集 a，函数 $h:a\to a$ 及 $x_0\in a$，现分以下几步证明满足条件(1)与(2)的函数 f 的存在性.

第一步，先定义一种特殊的 ω 到 a 的关系——归纳关系.

设关系 $r\subset\omega\times a$ 满足：

条件1°　$(0,x_0)\in r$；

条件2°　每当 $(n,x)\in r$ 时就有 $(n',h(x))\in r$.

此时称 r 为 ω 到 a 的(关于 h,x_0 的)归纳关系，简称为归纳关系.

现问：对给定的 a,h 与 x_0，归纳关系是否存在？答：存在，例如 $\omega\times a$ 就是. $\omega\times a$ 自然满足条件1°与2°. 但 $\omega\times a$ 是最大的归纳关系，而我们需要的是最小的.

第二步，找出 ω 到 a 的最小归纳关系.

令 $f=\{(n,x)\in\omega\times a\mid(n,x)\in$ 每个归纳关系$\}$，则 f 即为所求的最小归纳关系. 事实上，因

$$f\subset \text{每个归纳关系},$$

故 f 具有最小性；现只要证 f 满足归纳关系的条件1°与2°.

(i) $(0,x_0)\in f$ (因$(0,x_0)\in$每个归纳关系,见条件 1°),

(ii) 设$(n,x)\in f$,即$(n,x)\in$每个归纳关系. 由条件 2°,$(n',h(x))\in$每个归纳关系,于是,$(n',h(x))\in f$.

(i)与(ii)合起来说明 f 满足条件 1°与 2°. 至此证明了 f 是ω 到a 的最小归纳关系.

第三步,证明上步中的最小归纳关系 f 是ω 到a 的函数,即满足:

$$\forall m\in\omega\,\exists!x\in a\quad(m,x)\in f. \tag{13}$$

为证(13),对 m 归纳.

$m=0$ 时,(13)中的条件成立:惟一存在 $x\in a$ 使$(0,x)\in f$. 事实上,$(0,x_0)\in f$,且 x_0 是惟一的. 若 x_0 不惟一,则另有 $x_1\neq x_0,x_1\in a$ 且也使$(0,x_1)\in f$,这时作

$$f^-=f-\{(0,x_1)\}, \tag{14}$$

f^- 满足:

(i) $(0,x_0)\in f^-$(因 $x_0\neq x_1$),

(ii) 设$(n,x)\in f^-$,则$(n',h(x))\in f^-$,这是因为

$(n,x)\in f^-\to(n,x)\in f$ (因 $f^-\subset f$)

$\to(n',h(x))\in f$ (因 f 是归纳关系,满足条件 2°)

$\to(n',h(x))\in f^-$ (因 $n'\neq 0$,再注意 f^- 的定义式(14)).

(i)与(ii)说明 f^- 也是归纳关系,这与 f 的最小性矛盾.

现作归纳假设:对 m,惟一存在 $x_1\in a$ 使

$$(m,x_1)\in f. \tag{15}$$

下面要证对 m',(13)中的条件也成立:

$$\exists!x\in a\quad(m',x)\in f. \tag{16}$$

(16)式所要求存在性容易证明:因$(m,x_1)\in f$((15)式),且因 f 是归纳关系,故$(m',h(x_1))\in f$,这里 $h(x_1)\in a$. 问题在于惟一性:a 中除了$h(x_1)$再没有其他元素 x 也有$(m',x)\in f$. 为证明惟一性,反设有 $t\in a$ 使$(m',t)\in f$但

$$t\neq h(x_1), \tag{17}$$

这时我们发现 $f-\{(m',t)\}$也仍然是归纳关系:

1° $(0,x_0)\in f-\{(m',t)\}$ (因$(0,x_0)\in f$ 且 $m'\neq 0$).

2° 设

$$(n,x)\in f-\{(m',t)\}\quad(\text{此时当然也有}(n,x)\in f). \tag{18}$$

因 f 是归纳关系,故$(n',h(x))\in f$. 剩下要证明$(n',h(x))\neq(m',t)$,从而

$$(n',h(x))\in f-\{(m',t)\}.$$

为此，只用证当 $n=m$ 时 $h(x)\neq t$ 便可. 由(15)中 x_1 的惟一性(这是归纳假设)及(18)可知当 $n=m$ 时，$x=x_1$；再由(17)便知此时 $h(x)\neq t$.

至此已证 $f-\{(m',t)\}$ 也是归纳关系，从而与 f 的最小性矛盾. (13)的归纳证明过程完成.

最后一步，证明函数 f 满足条件(1)与(2).

事实上，因 f 是归纳关系，故满足条件 1°与 2°：

1°　$(0,x_0)\in f$,

2°　当 $(n,x)\in f$ 时 $(n',h(x))\in f$.

这可改写成：

1°　$f(x_0)=0$,

2°　当 $f(n)=x$ 时　$f(n')=h(x)$.

由此得

$$\begin{cases}f(x_0)=0,\\ f(n')=h(f(n)).\end{cases}$$

定理 1 证毕.　□.

思考题 2　设集 a，函数 $\mathrm{s}:a\to a$ 与 $e\in a$ 满足条件：

(i) $e\notin \mathrm{s}[a]$,

(ii) s 是单射,

(iii) 对任何 $b\subset a$，若 $e\in b$ 且 $\mathrm{s}[b]\subset b$，则 $b=a$,

证明存在双射 $f:\omega\to a$ 具有性质：

$$\begin{cases}f(0)=e,\\ f(n')=\mathrm{s}(f(n))\end{cases}\quad (a\text{ 与 }\omega\text{ 的同构性}).$$

注：思考题 2 中满足条件(i)，(ii)与(iii)的 $\langle a,s,e\rangle$ 叫做 Peano 系统. (s 叫做 a 上后继函数.)思考题 2 的结论指出：在题中所说的同构的意义下，ω 是惟一的 Peano 系统.

3.6.3　鸽笼原理

先回忆：ω 中非 0 自然数 $n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，与 $n\in\omega$ 之间存在双射的集叫做有限集(3.6.1 定义 4)，非空有限集可表示成 $\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$.

命题 1(鸽笼原理)　自然数 $n\in\omega$ 与它的任何真子集之间不存在双射(即一对一的满射).

证　对 n 归纳.

$n=0(=\varnothing)$时，n 无真子集.

假设 n 与 n 的真子集不能建立双射. 下证 $n+1$(即 $n'=n\cup\{n\}$)也不能与 $n+1$ 的真子集建立双射. 反设 $n+1$ 与其真子集 X($X\subset n+1$ 但 $X\neq n+1$)之间存在一对一的满射 f. 那么有两种可能情形:$n\in X$ 或 $n\notin X$.

(i) $n\notin X$ 时,有 $X\subset n$. 这时将 f 限制在 n 上便得 n 到 n 的真子集

$X-\{f(n)\}$(这是 X 的真子集,当然也是 n 的真子集)

的双射 $f\upharpoonright n$,从而与归纳假设矛盾.

(ii) $n\in X$ 时,设 $n=f(k)$,其中 $k\in n+1$(即 $k\in n$ 或 $k=n$). 这时作另一函数 $g:n\to X-\{n\}$ 如下:

$$g(i)=\begin{cases}f(i), & 若\ i\neq k, i\in n,\\ f(n), & 若\ i=k\in n.\end{cases}$$

g 是 n 到 $X-\{n\}$ 的双射,而 $X-\{n\}$ 是 n 的真子集,于是又与归纳假设矛盾. □

我们知道,ω 能与 ω 的真子集(例如全体偶数的集)建立一一对应. 与此相对照,我们有下面的命题.

命题 2 不存在有限集到它真子集的双射.

证 反设存在有限集 a 到它真子集 b 的双射 $f:a\to b$($b\subset a$ 且 $b\neq a$). 利用双射 $g:a\to n$(因 a 是有限集,故 g 存在)可以将 f 转换成自然数 n 到 n 的真子集的双射,从而与命题 1 矛盾. 所需要的双射是由已知双射经两次复合得到的双射:$g\circ f\circ g^{-1}$,这是 n 到 n 的真子集 $g[b]$ 的双射. □

练习 1 证明 $\mathbf{N}$ 是无限集(即不是有限集),进而知可数集都是无限集(按 3.6.1 定义 4).

命题 3 两个有限集的并集是有限集.

证 设 a 与 b 是有限集. 对 b 的元素个数 n 归纳.

$n=0$ 时,$b=\varnothing$,此时 $a\cup b=a$.

假设命题当第二个集有 n 个元素时成立,然后设存在双射 $f:b\to n+1$(即 b 有 $n+1$ 个元素),并设 $f(x)=n$,其中 $x\in b$. 这时 $b-\{x\}$ 有 n 个元素,按归纳假设 $a\cup(b-\{x\})$ 是有限集,于是存在 $a\cup(b-\{x\})$ 到某个 $k\in\omega$ 的双射. 下面分两种情形讨论.

(i) $x\in a$ 时,$a\cup b=a\cup(b-\{x\})$,这是有限集.

(ii) $x\notin a$ 时,易知存在 $a\cup b$ 到自然数 $k+1$ 的双射,所以 $a\cup b$ 是有限集. □

推论 1 有限个有限集的并集是有限集.

练习 2 证明有限集的子集也是有限集.

第四章　什么是实数?

上一章引进了 ZF 的前几条公理及集论的基本概念,并有了自然数的集论定义,从而在集论框架内走到了古典数学的源头. 本章结合对集论更深入的讨论来回答什么是实数. 这一部分是本书的重点内容之一. 这里使用的方法不同于 Dedkind 与 Cantor 等的传统方法.

§4.1　等价关系与分类

本节集中注意一个集的内部的元素间关系.

记 $a^2=a\times a$. 若 $R\subset a^2$,则把 R 叫做 a 上的二元关系. (a 上的二元关系即 a 到 a 的关系.)这时 R 的成员都是 a 的元素的有序对. 当 $(x,y)\in R$ 时,我们说 x 对 y 有 R 这个关系. 但这时反过来 y 对 x 不一定有 R 这个关系,即可能有 $(y,x)\notin R$. 也就是说 R 不一定具有对称性.

下面常把 $(x,y)\in R$ 写成 xRy.

4.1.1　等价关系

本章中,等价关系的重要作用会慢慢显示出来. 我们先叙述等价关系的定义,然后再谈它的意义与实例,本章后面将反复给出应用. 等价关系及其应用很好地注释了怀特海的名言:

“*极端的抽象是真正的武器,用以控制对具体事物的思维. 这个似乎矛盾的说法现已完全成立.*”[72]

定义 1(等价关系(equivalence relation))　设 $R\subset a^2$. 若 R 满足下面三个条件,就叫做 a 上的等价关系.

1°　自反性: $\forall x\in a(xRx)$.

2°　对称性: $\forall x,y\in a(xRy\rightarrow yRx)$.

3°　可递性: $\forall x,y,z\in a((xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz)$.

a 上的等价关系就是 a 上的一个具有自反性、对称性及可递性的二元关系. 在具体场合,如果只讨论一个具体的等价关系 R,常把 xRy 写成 $x\sim y$.

例如,集 a 上的恒等关系 $I=\{(x,x)\mid x\in a\}$ 是 a 上的等价关系. (为什么?) 这是 a 上最小的等价关系. a^2 是 a 上最大的等价关系.

为了理解等价关系这个概念,可以不限于抽象集.例如用 a 表示三角形的全体,那么"全等"关系与"相似"关系分别确定了 a 上的等价关系.(为什么?)

思考题 1 你能举出等价关系的一些例子吗?(不限于抽象集.)

练习 1 $a=\{0,1,2\}$上有多少个二元关系?其中有多少个等价关系?请把 a 上等价关系都列出来.

思考题 2 $a=\{0,1,2,3\}$上有多少个等价关系?

思考题 3 设集 a 上关系 R 有对称性:$xRy\to yRx$,再设 R 有可递性,于是有

$$xRy\wedge yRx\to xRx.$$

这能否说明等价关系定义中的自反性可以省去?

例 1 函数空间 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上的一种等价关系.

按 3.5.3 中 ^{a}b 的定义,

$$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}=\{f\mid f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\}.$$

$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 这个集(比喻为空间)中的每个元素(点)都是某个 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数(故说 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 是个函数空间).反之,每个 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数都是 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 的某个点.在 3.6.1 练习 2 中我们已见到了 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 中一些特殊点.事实上,我们每个人早已熟悉的自然数平方函数、立方函数等都是 $^{\mathrm{N}}\mathrm{N}$ 中的特殊点.因 N 到 N 的函数就是一个自然数序列(见 3.6.1 定义 5),故 $^{\mathrm{N}}\mathrm{N}$ 可说成是由所有自然数序列组成的空间.我们也把 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数叫做 $\mathbf{N}$ 上的一元运算,于是 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 又可说是由 $\mathbf{N}$ 上所有一元运算组成的空间.

空间 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上有很多有意义的等价关系,现认识其中一种.

设 $f,g\in{}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$,且满足条件:

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\neq g(n)\}\qquad(*)$$

是有限集,我们说 f 与 g 在条件($*$)的意义下几乎相等,记为 $f=_{*}g$.

例如,下面定义了 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 中的三个点:

$$f(n)=n,$$
$$g(n)=n^2,$$
$$h(n)=\begin{cases}n^2, & n<100,\\ n, & n\geqslant 100.\end{cases}$$

关于 f,g,h 这三个点,我们有

$$f\neq_{*}g,\quad g\neq_{*}h,\quad f=_{*}h.$$

下面我们验证"$=_{*}$"这个 $^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上的二元关系是个等价关系.

1° 自反性是显然的：$\forall f \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}(f =_* f)$.

2° 对称性也是显然的：$\forall f, g \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}(f =_* g \to g =_* f)$.

3° 可递性：设 $f =_* g$, $g =_* h$，即

$$a = \{n \in \omega \mid f(n) \neq g(n)\}$$

与

$$b = \{n \in \omega \mid g(n) \neq h(n)\}$$

都是有限集. 这时有

$$\{n \in \omega \mid f(n) \neq h(n)\} \subset a \cup b. \quad (为什么?)$$

因 $a \cup b$ 是有限集(3.6.3 命题 3)，故 $f =_* h$. 可递性证毕.

练习 2 设 $F \subset \mathscr{P}(\mathbf{N})$ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个滤子(见 3.6.1 练习 4)，即 F 具有性质：

(1) $\varnothing \notin F, \mathbf{N} \in F$.

(2) 若 $a, b \in F$，则 $a \cap b \in F$.

(3) 若 $a \subset b \subset \mathbf{N}$ 且 $a \in F$，则 $b \in F$.

若 $f, g \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 满足

$$\{n \in \mathbf{N} \mid f(n) = g(n)\} \in F,$$

则说 f 与 g 关于滤子 F 几乎相等，记为 $f =_F g$. 证明“$=_F$”这个 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上的二元关系是 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上的等价关系.

4.1.2 等价类

设 a 上有一个等价关系，现用～表示：

1° $\forall x \in a \quad x \sim x$ (自反性).

2° $\forall x, y \in a \quad (x \sim y \to y \sim x)$ (对称性).

3° $\forall x, y, z \in a \quad (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$ (可递性).

定义 1(等价类(equivalence class)) 任取 $x \in a$. 记

$$[x] = \{t \in a \mid t \sim x\},$$

我们把 $[x]$ 叫做 x 的等价类(对给定的等价关系而言). 作为 a 的子集，$[x]$ 由 a 中所有与 x 等价的元素组成；特别，$x \in [x]$(自反性).

命题 1 $x \sim y \leftrightarrow [x] = [y]$.

证($\to$) $x \sim y$ 时，

$$\begin{aligned} t \in [x] &\leftrightarrow t \sim x \\ &\leftrightarrow t \sim y \quad (由可递性与对称性) \\ &\leftrightarrow t \in [y]. \end{aligned}$$

($\leftarrow$) $[x] = [y] \to x \in [y] \to x \sim y$. □

对于 4.1.1 例 1 中$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$上的等价关系$=_*$，在条件(*)意义下几乎相等的两个函数属于同一等价类.

命题 2 $[x]\neq[y]\rightarrow[x]\cap[y]=\varnothing$.

证 $[x]\cap[y]\neq\varnothing\rightarrow\exists t(t\sim x\wedge t\sim y)$

$\rightarrow x\sim y$

$\rightarrow[x]=[y]$ □

命题 1 与命题 2 告诉我们集上的等价关系可用来进行分类.

定义 2(分类或剖分(partition)) 集 a 的子集族 $P(\subset\mathscr{P}(a))$若满足:

(i) $\bigcup P=a$，即$\forall x\in a\ \exists b\in P(x\in b)$,

(ii) P 中成员互不相交，即

$$\forall b,c\in P(b\neq c\rightarrow b\cap c=\varnothing),$$

则 P 叫做集 a 的分类或剖分.

例如 $P=\{\{0,1\},\{2\},\{3\}\}$是集 $a=\{0,1,2,3\}$的一个剖分，$P=\{\{0,1\},\{2,3\}\}$是 a 的另一个剖分.

关于等价关系的一个重要事实是:集上的任一等价关系都伴随着该集的一个剖分(下面的命题 3).

定义 3(商集(quotient set)) 设 R 是集a 上的一个等价关系. 关于 R，所有等价类的集记作

$$a/R=\{[x]\mid x\in a\},$$

a/R 叫做a 关于R 的商集.

命题 3 a/R 是a 的一个剖分.

证 a/R 满足

(i) $\bigcup a/R=a$，即所有等价类的并是 a. 这是因为

$$\forall x\in a\quad x\in[x]\in a/R.$$

(ii) a/R 中成员(即等价类)互不相交(见命题 2). □

反过来，a 的每个剖分(分类)对应于 a 上某个等价关系 R，使该剖分就是 a/R(见下面练习 1). 总之，集上所有等价关系与该集的所有剖分之间存在着一一对应(易见同一集上不同的等价关系对应于该集的不同剖分).

练习 1 设 P 是a 的一个剖分. 用 P 可定义a 上的二元关系R:

$$R=\{(x,y)\in a^2\mid\exists b\in P(x\in b\wedge y\in b)\}.$$

证明: (1) R 是a 上的等价关系,

(2) $a/R=P$.

练习 2 证明 $\mathbf{N}$ 上的二元关系

$$R=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{N},\ |m-n|\text{ 能被 }10\text{ 整除}\}$$

是 $\mathbf{N}$ 上的等价关系．试写出 $[0],[1]$ 及 $\mathbf{N}/R$．

考察集 $a=\{0,1,2\}$．a 上共有 5 个不同的等价关系(见 4.1.1 练习 1)，例如其中的一个是

$$R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}.$$

a 关于这个等价关系的剖分是

$$a/R=\{[0],[1]\},$$

其中 $[0]=\{0\},[1]=\{1,2\}$．为求 a 上等价关系的总数，只用看 a 有多少种不同的剖分．

练习 3　*写出 $a=\{0,1,2\}$ 的所有剖分．*

回到 4.1.1 思考题 2．回答 $a=\{0,1,2,3\}$ 上有多少个等价关系，可化为回答 a 有多少种不同的剖分，后者一般比前者更容易回答．

练习 4　*$a=\{0,1,2,3\}$ 有多少个不同的剖分?*

4.1.3　选代表原则与选择公理

集论发展过程中，不断出现一些假设．与我们前面已见到的 ZF 的公理不同，这些假设尽管被提出并被一些人使用，但开头往往并不被普遍认可．3.5.3 中谈到的单值化原则就是一例．按单值化原则，集到集的任何关系可以"切削"成函数．(这是选择公理的一种形式．)

关于等价关系与分类，我们也遇见了同样问题．集上每个等价关系都产生该集的一个分类(商集)．能否在商集的每个等价类中都选取一个代表，让这些代表形成一个集? 直观上看，"代表集"的存在不成问题．例如，4.1.2 练习 2 中 $\mathbf{N}$ 的一个分类是

$$\mathbf{N}/R=\{[0],[1],\cdots,[9]\},$$

这个商集的代表集可以取为 $\{0,1,\cdots,9\}$，也可取为 $\{10,11,\cdots,19\}$，等等．因为 $\mathbf{N}/R$ 是有限集，从有限个(10 个)等价类中各选出一个代表形成代表集是不成问题的．问题是：在任何情形下，特别是在有无限个等价类的情形下，都能这样做吗? 这里又涉及到那条集论原则——同时从一族非空集中各选出一个代表．

选代表原则　*任何分类都存在代表集．*

这一集论假设也是选择公理的一种形式．选择公理的通常形式：

选择公理(Axiom of Choice，简记为 AC)　*设 a 是由非空集组成的集族，则存在以 a 为定义域的函数 f 满足*

$$\forall x\in a(f(x)\in x).$$

公理断言存在的函数 f 叫做族 a 的选择函数．f 同时从族 a 的每个集 x 内选

出一个代表 $f(x)(\in x)$. 公理陈述中的"族"即是"集". 用族,以示与成员集区分.

直接可以看出选代表原则是选择公理通常形式的推论(任何剖分的选择函数的值域就是该剖分的代表集). 反之,由选代表原则可推出选择公理.

思考题 1 用选代表原则证明 AC(选择公理的通常形式).

选择公理后来得到普遍承认的一个重要原因是:使用它不会出毛病,除非不带选择公理的 ZF 本身有矛盾.

在日常数学活动中,包括古典分析的一些证明中,选择公理往往是不知不觉地在被应用.

§4.2 $\mathbf{N}^2$ 的一个重要分类
——什么是整数?

作为等价关系的第一个应用实例,我们来研究 $\mathbf{N}^2$ 的一个重要分类.

$\mathbf{N}^2$(即 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$)由全体自然数的有序对组成. $\mathbf{N}^2$ 的具体形象是下面图 4.2.1 的无限点阵.

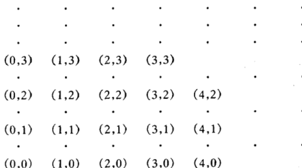


图 4.2.1

现作 $\mathbf{N}^2$ 上的二元关系 R:

$$R = \{((m,n),(p,q)) \mid m,n,p,q \in \mathbf{N} \text{ 且 } m+q=n+p\},$$

或表示成:

$$(m,n)R(p,q) \leftrightarrow m+q=n+p, \quad m,n,p,q \in \mathbf{N}.$$

R 是 $\mathbf{N}^2$ 上的等价关系:自反性与对称性立即可见. 至于可递性,设

$$(m,n)R(p,q) \text{ 且} (p,q)R(s,t),$$

即 $m+q=n+p$ 且 $p+t=q+s$. 二式相加,便得

$$m+t=n+s,$$

此即 $(m,n)R(s,t)$.

既然 R 是等价关系,往下把 R 写成~. 由 R 的定义显然有

$$(m,n)\sim(m+k,n+k).$$

下面是几个具体的等价类:

$[(3,0)]=\{(3,0),(4,1),(5,2),\cdots\}$,

$[(1,3)]=\{(0,2),(1,3),(2,4),\cdots\}$,

$[(4,3)]=\{(4,3),(5,4),(6,5),(3,2),(2,1),\cdots\}$.

在 $\mathbf{N}^2$ 这个无限点阵中,每个等价类都是某个点串,串中所有点位于一条指向右上方的射线上.

关于这个等价关系,所有等价类的集(即商集)用 $\mathbf{Z}$ 表示:

$$\mathbf{Z}=\mathbf{N}^2/\sim=\{[(m,n)]\mid m,n\in\mathbf{N}\}.$$

$\mathbf{N}^2$ 的这个分类之所以重要,是因为可以在 $\mathbf{Z}$ 上定义等价类与等价类之间的两种基本运算:加法与乘法,这些运算具有我们想要的性质,其中有新的性质是 $\mathbf{N}$ 没有的.

一、Z 上加法

设有等价类 $[(m,n)]$ 与 $[(p,q)]$. 现从两个类的许多元素中各任取一个代表,例如从 $[(m,n)]$ 中取出 (m,n),从 $[(p,q)]$ 中取出 (p,q). 规定

$$[(m,n)]+[(p,q)]=[(m+p,n+q)]. \tag{1}$$

运算结果得到第三个等价类,它是依靠前两个类的代表得到的. 问题是:这样规定的加法运算是否与所选取的代表有关系? 换用同一类中的其他代表按规定去运算,结果是否会改变?

现用例子说明上面所提问题的意思. 从 $[(3,0)]$ 中可取 $(3,0)$ 或 $(4,1)$ 作代表,从 $[(1,3)]$ 中可取 $(1,3)$ 或 $(2,4)$ 作代表. 按加法的上述规定(1),可以得到两种结果:若分别以 $(3,0)$ 与 $(1,3)$ 为代表,有

$$[(3,0)]+[(1,3)]=[(3+1,0+3)]=[(4,3)];$$

若分别换以 $(4,1)$ 与 $(2,4)$ 为代表,则有

$$[(3,0)+[(1,3)]=[(4+2,1+4)]=[(6,5)].$$

两种结果一样:$[(4,3)]=[(6,5)]$. 但这是否是巧合?

需要一般地证明:当 $(m,n)\sim(m_1,n_1)$ 且 $(p,q)\sim(p_1,q_1)$ 时,一定有 $(m+p,n+q)\sim(m_1+p_1,n_1+q_1)$. 事实上,证明很简单:由 $m+n_1=n+m_1$ 及 $p+q_1=q+p_1$. 二式相加立即可推出 $m+p+n_1+q_1=n+q+m_1+p_1$. 这样就可以得出结论:规定(1)所定义的加法是合理的,按规定(1),等价类的运算与所选取的代表无关. 以后每逢遇见在商集上定义运算(函数)或关系,都要做这件事,即要验证关于等价类所作的涉及代表的规定与代表的选取

无关.

下面讨论在 $\mathbf{Z}$ 上定义的加法所具有的性质. 这些性质依赖于自然数加法的性质. (自然数运算的性质来自 Peano 公理,详见 §1.2 附 3.)

首先注意按规定(1)有

$$[(p,q)]+[(m,n)]=[(p+m,q+n)],$$

再与(1)对比即知 $\mathbf{Z}$ 上加法满足交换律:

$$\forall a,b\in\mathbf{Z}(a+b=b+a).$$

我们看到,等价类加法的交换律来自自然数加法的交换律($m+p=p+m$, $n+q=q+n$).

再注意

$$([(m,n)]+[(p,q)])+[(s,t)]=[(m+p)+s,(n+q)+t],$$

便可由自然数加法的结合律推出 $\mathbf{Z}$ 上加法的结合律:

$$\forall a,b,c\in\mathbf{Z}((a+b)+c=a+(b+c)).$$

$\mathbf{Z}$ 中有一个重要成员:

$$[(0,0)]=\{(0,0),(1,1),\cdots,(k,k),\cdots\}.$$

它具有性质:

$$[(m,n)]+[(0,0)]=[(m+0,n+0)]=[(m,n)]$$

我们把 $[(0,0)]$ 这个特殊的等价类叫做 $\mathbf{Z}$ 的零元,用符号 $\bar{0}$ 表示:

$$\bar{0}=[(0,0)],$$

零元 $\bar{0}$ 具有的性质可写成

$$\forall a\in\mathbf{Z}(a+\bar{0}=a).$$

$\bar{0}$ 的性质来自自然数 0 的性质.

上面得到的 $\mathbf{Z}$ 上加法的性质与自然数加法性质一样. 值得注意的是 $\mathbf{Z}$ 上加法具有一条自然数加法不具备的新性质:

$$\forall a\in\mathbf{Z}\ \exists b\in\mathbf{Z}\ (a+b=\bar{0}),\tag{2}$$

这是我们引进商集 $\mathbf{Z}$ 的主要目的. 性质(2)的证明如下.

设 $a=[(m,n)]$. 取 $b=[(n,m)]$,便有

$$a+b=[(m,n)]+[(n,m)]=[(m+n,n+m)]=[(0,0)]=\bar{0}.$$

练习 1 证明对任意给定的 $a\in\mathbf{Z}$,性质(2)所断言存在的集 b 是惟一存在的,即

$$\forall a\in\mathbf{Z}\ \exists!b\in\mathbf{Z}(a+b=\bar{0}).$$

当 $a+b=\bar{0}$ 时,把 b 叫做 a 的负元,记作 $-a$,即 $-a=b$. 性质(2)与练习 1 合起来的意思是:$\mathbf{Z}$ 中每个元素都有自己惟一的负元. 由上面性质(2)的证明可以看出:

$$-[(m,n)]=[(n,m)].$$

有了负元概念,在 **Z** 中可以定义减法:

$$b-a=b+(-a).$$

这是 **Z** 与自然数集 **N** 之间的重要区别.

二、Z 上乘法

等价类与等价类的乘积由下式定义:

$$[(m,n)]\cdot[(p,q)]=[(mp+nq,mq+np)]. \tag{3}$$

为证明定义的合理性,要证明上述规定(3)与所选取的代表无关. 具体说是要证明当$(m,n)\sim(m_1,n_1)$且$(p,q)\sim(p_1,q_1)$时一定有

$$(mp+nq,mq+np)\sim(m_1p_1+n_1q_1,m_1q_1+n_1p_1). \tag{4}$$

事实上,由 $m+n_1=n+m_1$ 及 $p+q_1=q+p_1$ 可得

$$\begin{aligned}&(m+n_1)p+(n+m_1)q+(p+q_1)m_1+(q+p_1)n_1\\&=(n+m_1)p+(m+n_1)q+(q+p_1)m_1+(p+q_1)n_1,\end{aligned}$$

化简即得

$$mp+nq+m_1q_1+n_1p_1=mq+np+m_1p_1+n_1q_1,$$

此式说明(4)成立. 乘法定义的合理性证毕.

按规定(3)

$$[(p,q)]\cdot[(m,n)]=[(pm+qn,pn+qm)],$$

上式与(3)比较,利用自然数加法与乘法的交换律便得 **Z** 上乘法的交换律:

$$\forall a,b\in\mathbf{Z}(a\cdot b=b\cdot a).$$

同样利用自然数的运算性质可得:

$\forall a,b,c\in\mathbf{Z}\ ((a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c))$　(**Z** 上乘法结合律),

$\forall a,b,c\in\mathbf{Z}\ (a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c)$　(**Z** 上乘法对加法的分配律).

练习 2　证明 **Z** 中没有零因子,即

$$a\cdot b=\bar{0}\rightarrow(a=\bar{0}\vee b=\bar{0}).$$

Z 中除 $\bar{0}$ 外还有一个重要的特殊元素:

$$[(1,0)]=\{(1,0),(2,1),(3,2),\cdots,(k+1,k),\cdots\},$$

它具有性质:

$$[(m,n)]\cdot[(1,0)]=[(m\cdot1+n\cdot0,m\cdot0+n\cdot1)]=[(m,n)].$$

我们把$[(1,0)]$叫做 **Z** 的(乘法)单位元,用符号 $\bar{1}$ 表示:

$$\bar{1}=[(1,0)],$$

$\bar{1}$ 具有的上述性质可写成

$$\forall a \in \mathbf{Z} \quad (a \cdot \bar{1} = a).$$

易见 $\bar{1} \neq \bar{0}$(因$(1,0) \not\sim (0,0)$).

三、Z 上序

下面在 $\mathbf{Z}$ 上定义序. 规定

$$[(m,n)] < [(p,q)] \leftrightarrow m + q < n + p. \tag{5}$$

需要证明上面规定的序与代表选取无关. 设

$$(m,n) \sim (m_1,n_1) \text{ 且} (p,q) \sim (p_1,q_1),$$

要证明：

$$(m + q < n + p) \rightarrow (m_1 + q_1 < n_1 + p_1). \tag{6}$$

事实上由 $m + n_1 = n + m_1$ 及 $q + p_1 = p + q_1$ 得

$$m + q + n_1 + p_1 = n + p + m_1 + q_1.$$

由此便证明了(6). 这说明 $\mathbf{Z}$ 上序的定义(5)是合理的.

$\mathbf{Z}$ 上序具有以下性质. 对任意 $a,b,c \in \mathbf{Z}$,

1° (反自反) $a \not< a$,

2° (可递性) $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$,

3° (三分律) $a < b \vee a = b \vee b < a$,

4° (加法保序性) $a < b \rightarrow a + c < b + c$,

5° (乘法保序性) $c > \bar{0}$ 时, $a < b \rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

1°～4°直接来自自然数的相应性质.

5°的证明：设 $a = [(m,n)], b = [(p,q)], c = [(s,t)]$，则

$$a \cdot c = [(ms + nt, mt + ns)],$$
$$b \cdot c = [(ps + qt, pt + qs)].$$

$c > \bar{0}$ 即 $t < s$. 令 $s = t + u, u \neq 0$. 于是有

$$\begin{aligned} a < b &\rightarrow m + q < n + p \\ &\rightarrow (m + q)u < (n + p)u \\ &\rightarrow (m + q)s + (n + p)t < (n + p)s + (m + q)t \\ &\rightarrow ms + nt + pt + qs < mt + ns + ps + qt \\ &\rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \end{aligned}$$

5°证毕.

四、N 嵌入 Z

现考察 $\mathbf{Z}$ 的一串特殊元素组成的子集 $\overline{\mathbf{N}}$:

$$\overline{\mathbf{N}} = \{[(0,0)],[(1,0)],[(2,0)],\cdots,[(n,0)],\cdots,\}.$$

其中前两个元素是 $\overline{0}$ 与 $\overline{1}$. 记 $\overline{n}=[(n,0)]$，则

$$\overline{\mathbf{N}} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{n},\cdots\}.$$

$\overline{\mathbf{N}}$ 有以下性质：

(i) $\overline{m}+\overline{n}=[(m,0)]+[(n,0)]=[(m+n,0)]=\overline{m+n}$,

(ii) $\overline{m}\cdot\overline{n}=[(m,0)]\cdot[(n,0)]=[(mn,0)]=\overline{mn}$,

(iii) $m<n \leftrightarrow \overline{m}<\overline{n}$.

由于有这些性质，我们说 $\overline{\mathbf{N}}$ 构成 $\mathbf{Z}$ 的一个封闭子集. 这使我们可以把自然数集 $\mathbf{N}$ 用下面的方法嵌入 $\mathbf{Z}$ 中去. 令

$$f(n) = \overline{n}(\in \overline{\mathbf{N}} \subset \mathbf{Z}).$$

$f:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ 具有性质(注意 $\overline{\mathbf{N}}$ 的性质(i),(ii),(iii))：

$$f(m+n)(=\overline{m+n}=\overline{m}+\overline{n}) = f(m)+f(n),$$

$$f(mn)(=\overline{mn}=\overline{m}\cdot\overline{n}) = f(m)\cdot f(n),$$

$$m<n \to f(m)<f(n).$$

这些性质说明 f 是 $\mathbf{N}$ 到 $\overline{\mathbf{N}}$ 的保运算、保序的双射(f 的值域是 $\overline{\mathbf{N}}$，f 的保序性决定了 f 是单射)，且 $f(0)=\overline{0}$，$f(1)=\overline{1}$. 我们说 $\mathbf{N}$ 与 $\overline{\mathbf{N}}$ 同构，并说 f 把 $\mathbf{N}$ 同构嵌入 $\mathbf{Z}$. (关于同构的一般概念详见§5.2).

五、小结

$\mathbf{Z}$ 是作为 $\mathbf{N}^2$ 的一种商集(关于一种特殊等价关系)定义的，它由自然数有序对的等价类组成. $\mathbf{Z}$ 上有了加法与乘法两种二元运算，有了一个二元关系——序，还有两个具有特殊性质的元素 $\overline{0}$ 与 $\overline{1}$. $\mathbf{N}$ 可同构嵌入 $\mathbf{Z}$——同构于 $\mathbf{Z}$ 的封闭子集 $\overline{\mathbf{N}}$. $\mathbf{Z}$ 比 $\mathbf{N}$ 多出一条性质：可以自由做减法.

最后来观察 $\mathbf{Z}$ 的一般成员. 任取 $[(m,n)]\in\mathbf{Z}$. 这时有两种可能情形：

$m\geqslant n$ 时，设 $m=n+k$，此时有

$$[(m,n)] = [(n+k,n)] = [(k,0)] = \overline{k};$$

$m<n$ 时，设 $n=m+l$，此时有

$$[(m,n)] = [(m,m+l)] = [(0,l)] = -[(l,0)] = -\overline{l}.$$

现在我们看到，$\mathbf{Z}$ 中元素只有两种：一种是 $\overline{\mathbf{N}}$ 中元素，一种是 $\overline{\mathbf{N}}$ 中某个元素的负元. 这样，$\mathbf{Z}$ 有了下面的形象：

$$\mathbf{Z} = \{\cdots,-\overline{n},\cdots,-\overline{3},-\overline{2},-\overline{1},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\cdots,\overline{n},\cdots\}.$$

最后，我们把所有 $\overline{n}$ 都写成 n，称作(新)自然数(原来的自然数称作旧自然数，因新旧自然数性质相同，旧的可以忘掉)，于是 $\overline{\mathbf{N}}$ 成了 $\mathbf{N}$，且

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} = \{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

现在我们把 **Z** 叫做整数集,它具有我们熟知的整数集的性质,而这些性质来自自然数的性质. **Z** 是 **N** 的扩张,但 **Z** 与 **N** 相比,**Z** 具有更对称的构造. 我们把这个结构记作:

$$\langle \mathbf{Z}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle.$$

注 把三个不同的(旧)自然数有序对的等价类分成三列(在各列有序对的第一与第二坐标上方分别标出"收"与"支"二字)列出如下:

收支	收支	收支
(1,0)	(0,0)	(0,1)
(2,1)	(1,1)	(1,2)
(3,2)	(2,2)	(2,3)
⋮	⋮	⋮
$(k+1,k)$	(k,k)	$(k,k+1)$
⋮	⋮	⋮

第一列,我们见到了整数 1;第二列,我们见到了整数 0;第三列,我们见到了整数 -1.

本节我们完整地走完了从自然数到整数的全过程:以自然数为基础定义了整数,并由自然数性质推出了整数性质. 接着请思考下面的问题:

思考题 1 如何从整数走向有理数?(思考之后再进入下一节.)

4.2 附 由哪些自然数性质推出了整数性质?

由 **N** 到 **Z** 用到了 **N** 的以下共 13 条性质:

加法

1° 交换律,

2° 结合律.

乘法

1° 交换律,

2° 结合律,

3° 对加法的分配律.

0 与 1 的性质

1° $n+0=n$,

2° $n\cdot 1=n$,

3° $0\neq 1$.

序

1° 反自反性 $n \not< n$,

2° 可递性 $(m<n \wedge n<k) \to m<k$,

3° 三分律 $m<n \vee m=n \vee n<m$,

4° 加法保序性 $m<n \to m+k<n+k$,

5° 乘法保序性 $(m<n \wedge k\neq 0) \to mk<nk$.

注 1 自然数加法与乘法消去律:

$$m+k=n+k \to m=n,$$

$$m\cdot k=n\cdot k \text{ 及 } k\neq 0 \to m=n.$$

可由 **N** 上面的性质推出(用反证法及序的性质等).

注 2 上述 13 条性质 **Z** 也具有,但 **Z** 多出一条性质:每个整数都有负元.

§4.3 重要练习一: $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$的一个分类 ——什么是有理数?

本节是关于等价关系与等价类的一个大练习题,请读者完成. 练习的每一步都不难,但完成了整个过程之后便登上了一个新的高度.

上节我们构造了整数集 **Z**,并推出了整数的一些基本性质. 自然数集 **N** 已被同构嵌入 **Z**. 关于整数所熟知的其他性质都可由这些基本性质得到. 下面的练习以整数为基础,整数性质可以自由运用. (除了 **Z** 的性质,上节构造 **Z** 的具体过程可以忘掉.)

设 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})(=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{Z},b\neq 0\})$上二元关系 R 由下式定义:

$$(a,b)R(c,d) \leftrightarrow ad=bc.$$

1. 请验证 **R** 是 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$上的等价关系:

(i) (自反性)$(a,b)R(a,b)$.

(ii) (对称性)$(a,b)R(c,d) \to$__________.

(iii) (可递性)$(a,b)R(c,d)$且$(c,d)R(e,f) \to$__________.

2. 列出以下等价类中若干元素(注意$[(a,b)]=\{(c,d)\in\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})\mid ad=bc\}$):

$[(1,1)]=\{(2,2),\qquad\qquad\}$.

$[(0,2)]=\{\qquad\qquad\}$.

$[(-1,2)]=\{\qquad\qquad\}$.

$[(3,-5)]=\{\qquad\qquad\}$.

记 $\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}(\mathbf{Z}-\{0\})/R=\{[(a,b)]\mid a,b\in\mathbf{Z},b\neq 0\}$.

一、Q上加法

定义 $\mathbf{Q}$ 的加法为：

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(ad+bc,bd)].$$

3．验证加法定义的合理性，即验证（往下 $(a,b)R(c,d)$ 写成 $(a,b)\sim(c,d)$）：

$$(a,b)\sim(a_1,b_1)\text{ 且 }(c,d)\sim(c_1,d_1)\rightarrow(ad+bc,bd)\sim(a_1d_1+b_1c_1,b_1d_1).$$

4．证明以下结论(1)～(4)．

(1) 加法交换律：$\forall r,s\in\mathbf{Q}(r+s=s+r)$．（设 $r=[(a,b)]$，$s=[(c,d)]$）

(2) 加法结合律：$(r+s)+t=r+(s+t)$．

(3) $\mathbf{Q}$ 中存在零元 $\bar{0}$ 使 $\forall r(=[(a,b)])\in\mathbf{Q},r+\bar{0}=r$．

(4) $\mathbf{Q}$ 中任一元皆有负元：$\forall r\in\mathbf{Q}\exists s\in\mathbf{Q}\ r+s=\bar{0}$．（此时 s 叫做 r 的负元，记 $s=-r$．）

二、Q上乘法

在 $\mathbf{Q}$ 中规定乘法为：

$$[(a,b)]\cdot[(c,d)]=[(ac,bd)].\ (b,d\neq0\rightarrow bd\neq0)$$

5．验证乘法定义的合理性，即：$(a,b)\sim(a_1,b_1)$且$(c,d)\sim(c_1,d_1)\rightarrow$ ________．

6．证明以下结论(5)～(10)：

(5) $r\cdot s=s\cdot r$．

(6) $(r\cdot s)\cdot t=r\cdot(s\cdot t)$．

(7) $\mathbf{Q}$ 中存在单位元 $\bar{1}$ 使 $\forall r\in\mathbf{Q}(r\cdot\bar{1}=r)$．

(8) $\bar{1}\neq\bar{0}$．

(9) $\mathbf{Q}$ 中任一非 $\bar{0}$ 元皆有乘法逆元：对任一 $r\in\mathbf{Q}$，若 $r\neq\bar{0}$，则有 $s\in\mathbf{Q}$ 使 $r\cdot s=\bar{1}$．（s 叫做 r 的乘法逆元．）

(10)（分配律） $r\cdot(s+t)=r\cdot s+r\cdot t$．

7．r 的乘法逆元记作 r^{-1}（$r\neq\bar{0}$ 时），则 $[(a,b)]^{-1}=[(\qquad)]$．

若 $r,s\in\mathbf{Q},s\neq\bar{0}$，则除法定义为 $r\div s=r\cdot s^{-1}$．

设 $r=[(a,b)],s=[(c,d)]\neq\bar{0}$，则 $r\div s=[(\qquad)]$．

思考题1 本节练习由 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 出发．若改为由 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 出发，有什么结果？

三、Q 中序

设 $r=[(a,b)]$, $s=[(c,d)]$, 且 $b,d>0$. (若 $b<0$, 写 $[(a,b)]=[(-a,-b)]$, 则 $-b>0$.)规定

$$r<s(\text{或写 } s>r)\leftrightarrow ad<bc.$$

8. 序定义合理,即当 $(a,b)\sim(a_1,b_1)$, $(c,d)\sim(c_1,d_1)$ 且 $b,b_1,d,d_1>0$ 时,

$$ad<bc\rightarrow a_1d_1<b_1c_1.$$

9. 证明关于 Q 中序的以下结论(11)~(15),(设 $r=[(a,b)]$, $s=[(c,d)]$, $t=[(e,f)]$, $b,d,f>0$).

(11) 反自反性: $r\not<r$.

(12) 可递性: $r<s\wedge s<t\rightarrow r<t$.

(13) 三分律: $r<s\vee r=s\vee s<r$.

(14) (+的保序性) $r<s\leftrightarrow r+t<s+t$.

(15) (·的保序性) $t>\bar{0}$ 时 $r<s\leftrightarrow r\cdot t<s\cdot t$. (注意: $t=[(e,f)]>\bar{0}$ 时,设 $f>0$, 则有 $e>0$.)

四、Z 嵌入 Q

现考察 Q 的特殊子集

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Z}}&=\{[(p,1)]\mid p\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\cdots,[(-n,1)],\cdots,[(-2,1)],[(-1,1)],[(0,1)],\\&\quad[(1,1)],[(2,1)],\cdots,[(n,1)],\cdots\}.\end{aligned}$$

记 $\bar{n}=[(n,1)]$, 则 $-\bar{n}=[(-n,1)]$, 于是

$$\overline{\mathbf{Z}}=\{\cdots,-\bar{n},\cdots,-\bar{2},-\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n},\cdots\}.$$

易知 $\overline{\mathbf{Z}}$ 构成 Q 的封闭子集:

$$[(p,1)]+[(q,1)]=[(p+q,1)],$$
$$[(p,1)]\cdot[(q,1)]=[(p\cdot q,1)].$$

按 Q 上序的定义,对任意 $p,q\in\mathbf{Z}$, 又有

$$p<q\leftrightarrow[(p,1)]<[(q,1)].$$

10. 为了把 Z 嵌入 Q, 定义 $f:\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Q}$ 如下:

$$f(p)=______(\in\overline{\mathbf{Z}}\subset\mathbf{Q}).$$

11. 证明 f 具有保运算性.

12. 证明 f 具有保序性.

13. $\mathrm{Ran}(f)=$ ______.

题 10～13 说明 f 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\overline{\mathbf{Z}}$ 的保运算、保序双射，且

$$f(0)=[(0,1)]=\overline{0},\quad f(1)=[(1,1)]=\overline{1}.$$

这时我们说 $\mathbf{Z}$ 与 $\overline{\mathbf{Z}}$ 同构，并说 f 把 $\mathbf{Z}$ 同构嵌入 $\mathbf{Q}$.

注意以上练习中只涉及整数的有序对及其等价类，过程中不应出现分数.

五、小结

$\mathbf{Q}$ 是作为 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$ 的一种商集(关于一种特殊等价关系)定义的，它由整数的有序对(第二坐标不为 0)的等价类组成. $\mathbf{Q}$ 中任一元素都可表示成 $\overline{\mathbf{Z}}$ 中两个元素相除所得的商：

$$\begin{aligned}[(p,q)]&=[(p,1)\cdot[(1,q)]\\&=[(p,1)\cdot[(q,1)]^{-1}\\&=[(p,1)]\div[(q,1)](\text{见题 7}),\end{aligned}$$

此结果写成"分数"形式：

$$[(p,q)]=\frac{[(p,1)]}{[(q,1)]}.\ (\text{分数定义成分子除以分母所得商.})$$

我们有

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{[(p,1)]}{[(q,1)]}\mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq0\right\}.$$

最后我们把 $\mathbf{Q}$ 中所有形为$[(p,1)]$的元素都写成 p，($\overline{0}$ 与 $\overline{1}$ 从而写成 0 与 1)称作(新)整数(与原来的旧整数性质相同). 于是 $\overline{\mathbf{Z}}$ 成了 $\mathbf{Z}$，且

$$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq0\right\}.$$

思考题 2 为什么$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$？

我们有

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=[(p,q)]+[(r,s)]=[(ps+qr,qs)]=\frac{ps+qr}{qs},$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=[(p,q)]\cdot[(r,s)]=[pr,qs)]=\frac{pr}{qs}.$$

现在我们把 $\mathbf{Q}$ 叫做有理数集，上述练习告诉我们，有理数性质来自整数的性质. $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的扩张. $\mathbf{Q}$ 比 $\mathbf{Z}$ 又多了对称性：每个非零元都有乘法逆元，从而可以定义乘法的逆运算——除法. 这是引进 $\mathbf{Q}$ 的主要目的.

有理数集 $\mathbf{Q}$ 连同其上的加法与乘法(二元运算)，序(二元关系)及两个特殊元素 0 与 1，形成了新的结构

$$\langle\mathbf{Q},+,\cdot,<,0,1\rangle.$$

本节练习使我们完整地走完了从整数到有理数的全过程：以整数为基础定义了有理数，并由整数的 14 条基本性质推出了有理数的 15 条基本性质．由于 **Q** 具有这 15 条性质，我们说 **Q** 形成了一个有序域（简称为序域）．上述过程让我们又一次熟悉了等价关系与分类的概念与方法．

* **思考题 3**　如何从有理数走向实数？

§4.4　N 上超滤与 N 的一种扩张

滤子概念是集论的初等概念．本节利用 **N** 上超滤对全体一元自然数函数进行分类．这是等价关系与分类的又一重要例题，结果很有意义——让我们得到 **N** 的另一种扩张．

读本节前可以先读节尾 4.4.2 小结，甚至只读该小结便可暂时跨过本节内容直接进入后面章节．

4.4.1　N上滤子

先从自然数集 **N** 的子集说起．任何人，不管学不学数论或其他数学，都得要和 **N** 的子集打交道．**N** 的子集实在很多，例如

$$a=\{0,1,2,\cdots,9\},$$
$$b=\{0,2,4,6,\cdots,2n,\cdots\},$$
$$c=\{0,1,2,5\},$$
$$\vdots$$

N 的每个子集相应于着自然数的某条性质．例如拿上面写出的 a,b,c 来说，a 对应于性质“小于 10”，b 对应于“是偶数”或“是方程

$$\sin\frac{x\pi}{2}=0$$

的自然数解”，c 则是以下“方程”的自然数解集：

$$x(x-1)(x-2)(x-5)=0,$$
$$x\leqslant 2\ \vee\ x=5,$$
$$x\leqslant 5\ \wedge\ (x-3)(x-4)\neq 0,$$
$$\vdots$$

上面说的“方程”是广义的，不一定是代数方程，甚至可以带一些逻辑符号．这类“方程”实际上是含变元的逻辑公式．

N 的任何子集都是某种方程的解集．事实上，设 $a\subset\mathbf{N}$，则 a 是方程

$$f_a(x)=1$$

的解集,其中 f_a 由下式定义:

$$f_a(x)=\begin{cases}1, & x\in a,\\0, & x\in \mathbf{N}-a.\end{cases}$$

空集是矛盾方程的解集,**N** 则是恒等式的解集.

什么是滤子? 简单地说,一个 **N** 上滤子本质上就是自然数某些性质的相容组合.什么是相容? 用例子说,“是偶数”与“是奇数”是不相容的性质,而“是偶数”与“大于 5”则是相容的性质.

换一种说法,**N** 上滤子相当于某种相容方程组.(这里的方程是广义的,这里的相容是指方程组内任意有限个方程联立在 **N** 中有解,即解集不是空集.)

定义 1 (**N** 上滤子(filter on **N**))

设 **N** 的子集族 $F(\subset\mathscr{P}(\mathbf{N}))$ 满足下面的条件 1°,2°与 3°:

1° $\varnothing\notin F,\mathbf{N}\in F$,

2° 若 $a,b\in F$,则 $a\cap b\in F$,

3° 若 $a\subset b\subset\mathbf{N}$ 且 $a\in F$,则 $b\in F$,

那么 F 叫做 **N** 上滤子. 如果 **N** 上滤子 F 又满足条件 4°:

4° $\forall a\subset\mathbf{N}(a\in F\vee(\mathbf{N}-a)\in F)$,

那么 F 叫做 **N** 上的超滤(ultrafilter). 如果超滤 F 又满足条件 5°:

5° **N** 的任一有限子集 $\notin F$,

那么 F 叫做 **N** 上的自由超滤(free ultrafilter).

例 1 独元族 $\{\mathbf{N}\}$ 满足条件 1°,2°,3°,故是个滤子;但不满足 4°,故不是超滤.这是 **N** 上的平凡滤子.

例 2 $F_\sigma=\{a\subset\mathbf{N}\mid\mathbf{N}-a$ 是有限集$\}$. F_σ 由 **N** 的所有“余有限”子集(即余集为有限集的子集)组成. F_σ 是 **N** 上滤子(注意 **N** 的两个余有限子集之交仍是余有限子集). F_σ 不满足 4°,故不是超滤. 例如,偶数集与奇数集互余,都不是余有限子集,故都不在 F_σ 中. 但 F_σ 满足 5°,因为 F_σ 中没有有限集(余有限子集当然是无限集). F_σ 叫做余有限子集滤子或 Frechet 滤子.

在寻找超滤之前,先讨论超滤的简单性质.

命题 1 设 F 是 **N** 上超滤,且 $a_1\cup a_2=a\in F$,则有:

$$a_1\in F\vee a_2\in F.$$

证 因 $a\in F$,故 $\mathbf{N}-a\notin F$(否则 $\varnothing=a\cap(\mathbf{N}-a)\in F$,矛盾). 又因 $a=a_1\cup a_2$,

故
$$(\mathbf{N}-a_1)\cap(\mathbf{N}-a_2)(=\mathbf{N}-a)\notin F.$$

由此及滤子性质 2°知 $\mathbf{N}-a_1\notin F$ 或 $\mathbf{N}-a_2\notin F$. 再由超滤性质 4°知 $a_1\in F$ 或 $a_2\in F$. □

推论　设 F 是 $\mathbf{N}$ 上超滤，且 $a_1\cup\cdots\cup a_n=a\in F$，则有

$$a_1\in F\vee\cdots\vee a_n\in F. \text{（对 } n \text{ 归纳）}$$

命题 2　设 F 是超滤，则有

$$F \text{ 是自由超滤} \leftrightarrow F\supset F_\sigma \text{(Frechet 滤子)}.$$

证　$(\rightarrow)$任取 $a\in F_\sigma$，$\mathbf{N}-a$ 是有限集(按例 2 中 F_σ 的定义). 已知 F 是自由超滤，故有限集 $\mathbf{N}-a\notin F$(由性质 5°). 再由超滤性质 4°知 $a\in F$.

$(\leftarrow)$反设 F 不是自由的，于是有某个有限集 $a\in F$. 这时余有限子集 $\mathbf{N}-a\in F_\sigma$. 已知 $F_\sigma\subset F$，故 $\mathbf{N}-a\in F$. 由性质 2°得 $a\cap(\mathbf{N}-a)=\varnothing\in F$，与性质 1°矛盾. □

至此尚未见到具体超滤.

例 3　子集族 $F_0=\{a\subset\mathbf{N}|0\in a\}$是超滤，因为以下事实成立：

1°　$0\notin\varnothing$，$0\in\mathbf{N}$，

2°　$0\in a\wedge 0\in b\rightarrow 0\in a\cap b$，

3°　$0\in a\subset b\rightarrow 0\in b$，

4°　$0\in a\vee 0\in\mathbf{N}-a$.

超滤 F_0 不是自由超滤，因为独立元集$\{0\}\in F_0$.

类似，我们有一串超滤：

$$F_1=\{a\subset\mathbf{N}\mid 1\in a\},$$
$$F_2=\{a\subset\mathbf{N}\mid 2\in a\},$$
$$\vdots$$
$$F_n=\{a\subset\mathbf{N}\mid n\in a\},$$
$$\vdots$$

我们把这种超滤$(F_n,n\in\mathbf{N})$叫做 $\mathbf{N}$ 上的主超滤. 每个主超滤都含有自己的独元集$(\{n\}\in F_n)$，所以它们都是非自由的超滤. 换句话说，自由超滤一定是非主超滤. 反过来也正确(练习 1)，于是自由超滤就是非主超滤，二者同一.

练习 1　*证明 $\mathbf{N}$ 上非自由的超滤一定是某个主超滤.*

现在的问题是：自由超滤即非主超滤存在吗？

在寻找自由超滤之前，还要认识超滤的一个性质——极大性. 一般滤子不一定有极大性. 滤子 F 具有极大性，是指：若滤子 $G\supset F$，则 $G=F$. 以例 3 中的主超滤 F_0 为例，F_0 是极大滤子，因为 F_0 不能再扩张成其他滤子(若有，其元素也必含有 0，否则与滤子性质 1°，2°矛盾，因为$\{0\}\in F_0$).

命题 3 超滤一定是极大滤子.

证 设 F 是超滤. 反设有滤子 $G \supset F$ 使 $G \neq F$,这时有 $a \in G$ 但 $a \notin F$. 因 F 是超滤,由性质 4°知 $N - a \in F \subset G$. 对滤子 G 用性质 2°得

$$a \cap (N - a) = \varnothing \in G,$$

这与滤子性质 1°矛盾. □

如果说滤子相应于某种相容方程组,那么一个超滤则相应于某个极大相容方程组. 如果说滤子相应于自然数性质的一种相容组合,那么超滤则相应于自然数性质的一种极大相容组合.

为了寻找自由超滤,可以从 Frechet 滤子 F_σ(见例 2)开始扩张. F_σ 不含有限集,但不是超滤. 因超滤有极大性,为达到极大,就要有一步步扩张滤子的方法. 扩张的基本做法如下.

设 F 是滤子. 若 F 为超滤,则已为极大. 若 F 非超滤,则不满足条件 4°,于是必有 $a \subset \mathbf{N}$ 使

$$a \notin F \wedge (\mathbf{N} - a) \notin F. \tag{1}$$

这时 a 满足

$$\forall b \in F(a \cap b \neq \varnothing). \tag{2}$$

事实上,若 $a \cap b = \varnothing$,则 $b \subset (\mathbf{N} - a)$;由滤子性质 3°知 $\mathbf{N} - a \in F$,这与(1)矛盾.

有了(2),将 F 扩张的方法是:拿 a 与 F 中所有元素分别取交,然后让这些交连同所有比某个交更大的那些 $\mathbf{N}$ 的子集一道进入 F,便得到一个比 F 更大的滤子. 我们把这个更大的滤子叫做由 $F \cup \{a\}$ 生成的滤子. 如果生成的是超滤,便止步;如果生成的不是超滤,我们可以重复上述过程一步步扩张,直到得出超滤为止.

直观上,上面的过程可以让我们相信一条原则:

滤子扩张原则 *任何滤子都可以扩张成一个超滤.*

用选择公理可以证明滤子扩张原则(详见第九章). 不仅如此,集论研究表明,滤子扩张原则比选择公理更可靠,可以更放心使用.

按滤子扩张原则把 Frechet 滤子 F_σ 扩张成为超滤,得到的超滤是 $\mathbf{N}$ 上的自由超滤即非主超滤(见命题 2).

注 本段仅讨论自然数集 $\mathbf{N}$ 上的滤子与超滤. 可以更一般地建立任意集上的滤子与超滤概念,并建立起类似的理论.

4.4.2 N 的一种扩张

前面已见过自然数函数空间

$$^{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \{f \mid f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}\}$$

上等价关系的例子(4.1.1 例 1,练习 2). 本段利用超滤给出$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$的一种重要分类,从而得到 N 的一种扩张.

约定用 $f+g$, $f\cdot g$ 与 $f\circ g$ 分别表示自然数函数 f 与 g 的和、积与复合,它们是分别用以下三个公式定义的自然数函数:

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n),$$
$$(f\cdot g)(n) = f(n)\cdot g(n),$$
$$(f\circ g)(n) = f(g(n)).$$

另外用 $f=g$ 表示 $\forall n\in\mathbf{N}(f(n)=g(n))$,用 $f<g$ 表示 $\forall n\in\mathbf{N}(f(n)<g(n))$.

一、$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 的一种剖分——$^*\mathbf{N}$

现设 F 是一个 N 上非主超滤. 如果自然数函数 f 与 $g(\in {^{\mathbf{N}}\mathbf{N}})$满足

$$\{n\in\mathbf{N} \mid f(n) = g(n)\} \in F,$$

则说 f 与 g 关于 F 几乎相等,记为 $f=_F g$. ($f=g$ 是 $f=_F g$ 的特例,因 $\mathbf{N}\in F$.)"$=_F$"是$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$上的等价关系(参见 4.1.1 练习 2. 自反性与对称性是明显的;可递性来自事实

$$\{n\in\mathbf{N} \mid f(n)=h(n)\} \supset \{n\in\mathbf{N} \mid f(n) = g(n)\} \cap \{n\in\mathbf{N} \mid g(n) = h(n)\},$$

而这个事实来自相等(=)的可递性.)

用这个等价关系($=_F$)得到$^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$的分类(商集)记作

$$^*\mathbf{N} = \{[f] \mid f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\},$$

其元素$[f]$(等价类)由与 f(关于 F)几乎相等的函数 g 所组成:

$$[f] = \{g\in {^{\mathbf{N}}\mathbf{N}} \mid f =_F g\}.$$

下面定义$^*\mathbf{N}$上的运算. 仔细研究$^*\mathbf{N}$及其运算的性质,发现$^*\mathbf{N}$与 N 之间具有保真性("保真"的涵义下面将会看到). 这个$^*\mathbf{N}$是我们不熟悉的新奇世界,但具有我们很熟悉的性质.

二、$^*\mathbf{N}$ 上加法与乘法

$^*\mathbf{N}$上加法与乘法分别由下面二式定义:

$$[f]+[g] = [f+g], \tag{1}$$
$$[f]\cdot[g] = [f\cdot g]. \tag{2}$$

为验证定义(1),(2)式的合理性,设 $f=_F f_1$, $g=_F g_1$. 需要验证

$$(f+g) =_F (f_1+g_1) \text{ 及 } f\cdot g =_F f_1\cdot g_1.$$

记 $a=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=f_1(n)\}$，$b=\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=g_1(n)\}$. 易见

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)+g(n)=f_1(n)+g_1(n)\}\supset a\cap b, \tag{3}$$

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\cdot g(n)=f_1(n)\cdot g_1(n)\}\supset a\cap b. \tag{4}$$

由 $f=_F f_1$（即 $a\in F$）与 $g=_F g_1$（即 $b\in F$）及滤子性质知(3)与(4)左端皆属于 F. $^*\mathbf{N}$ 加法与乘法定义的合理性证毕.

函数值总取 0 的常值函数就用 0 表示. 我们有

$$[f]+[0]=[f+0]=[f].$$

同样，取常值 1 的函数用 1 表示，则

$$[f]\cdot[1]=[f\cdot 1]=[f].$$

当然有 $[0]\neq[1]$，因为 $0\neq_F 1$（这是因为 $\varnothing\notin F$）.

$^*\mathbf{N}$ 上加法性质：

1° 交换律

$$[f]+[g](\overset{(1)}{=}[f+g]=[g+f])=[g]+[f].$$

2° 结合律

$$([f]+[g])+[h](=[f+g+h])=[f]+([g]+[h]).$$

$^*\mathbf{N}$ 上乘法性质：

1° 交换律

$$[f]\cdot[g](\overset{(2)}{=}[f\cdot g])=[g]\cdot[f].$$

2° 结合律

$$([f]\cdot[g])\cdot[h](=[f\cdot g\cdot h])=[f]\cdot([g]\cdot[h]).$$

3° 对加法的分配律

$$[f]\cdot([g]+[h])(=[f\cdot(g+h)])=[f]\cdot[g]+[f]\cdot[h].$$

三、$^*\mathbf{N}$ 上序

规定

$$[f]<[g]\leftrightarrow\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}\in F \tag{5}$$

(5)的右端被说成是 f（关于 F）几乎小于 g，记作，$f<_F g$. 为验证(5)式定义的合理性，设 $f<_F g$，且设 $f=_F f_1, g=_F g_1$，即

$$a=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=f_1(n)\}\in F \text{ 且 } b=\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=g_1(n)\}\in F.$$

易知

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f_1(n)<g_1(n)\}\supset a\cap b\cap\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\},$$

由上式与 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}\in F$ 及滤子性质得

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f_1(n)<g_1(n)\}\in F.$$

序的定义的合理性证毕.

$^*\mathbf{N}$ 上由(5)式定义的序具有以下性质.

1° 反自反性

$\forall f\in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}([f]\not<[f])$. (这是因为 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<f(n)\}=\varnothing\notin F$.)

2° 可递性

$\forall f,g,h\in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}([f]<[g]\wedge[g]<[h]\to[f]<[h])$. (这是因为 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<h(n)\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}\cap\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)<h(n)\}$.)

3° 三分律

$\forall f,g\in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}([f]<[g]\vee[f]=[g]\vee[g]<[f])$. (由 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}\cup\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=g(n)\}\cup\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)<f(n)\}=\mathbf{N}\in F$ 及 4.4.1 命题 1 推论即得.)

4° 加法保序性

$[f]<[g]\to[f]+[h]<[g]+[h]$. (这是因为 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)+h(n)<g(n)+h(n)\}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}$.)

5° 乘法保序性

$([f]<[g]\wedge[h]>[0])\to[f]\cdot[h]<[g]\cdot[h]$. (这是因为 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)h(n)<g(n)h(n)\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)<g(n)\}\cap\{n\in\mathbf{N}\mid h(n)>0\}$.)

至此我们看到,关于加法,乘法及序,$^*\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{N}$ 具有同样的 13 条性质(参见§4.2 附),$^*\mathbf{N}$ 的性质来自 $\mathbf{N}$ 的相应的性质.

$^*\mathbf{N}$ 有什么新鲜处？这是我们要着重研究的.

四、$^*\mathbf{N}$ 上的特种一元函数

$^*\mathbf{N}$ 上的一元函数种类很多(函数空间 ${}^{*\mathbf{N}}{}^*\mathbf{N}$ 比 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 复杂得多). 我们发现其中有一类特别有趣,那就是 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 在 ${}^{*\mathbf{N}}{}^*\mathbf{N}$ 中的“影子空间”,现介绍如下.

每个自然数函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 都相应有一个 $^*\mathbf{N}$ 上的一元函数 $^*f:{}^*\mathbf{N}\to{}^*\mathbf{N}$,它由下式定义:

$$^*f([g])=[f\circ g]\quad(g\in{}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}).\tag{6}$$

注意 $^*f$ 的自变量 $[g]$ 与函数值 $[f\circ g]$ 都是 $^*\mathbf{N}$ 中的等价类,这是与 f 不同的.

为验证函数 $^*f$ 的上述定义的合理性,设 $g={}_Fg_1$,即

$$\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=g_1(n)\}\in F.$$

易见

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(g(n))=f(g_1(n))\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=g_1(n)\},$$

故上式左端属于 F,即 $f\circ g={}_Ff\circ g_1$. $^*f$ 的定义的合理性证毕.

f与$^*f$关系密切,首先表现于以下3个命题.

命题1 若$f<g$,则$^*f<^*g$.

证 任取$[h]\in {}^*\mathbf{N}$,由(6)有

$$^*f([h]) = [f\circ h] < [g\circ h] = {}^*g([h]),$$

中间的不等式来自事实(注意$f<g$):

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(h(n)) < g(h(n))\} = \mathbf{N}\in F. \qquad \square$$

注 命题1中"<"可改为"≤",证明类似.

命题2 若f严格增($m<n$时,$f(m)<f(n)$),则$^*f$也严格增:

$$x<y\rightarrow {}^*f(x) < {}^*f(y).$$

证 设$x=[g]$,$y=[h]$且$[g]<[h]$即$\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)<h(n)\}\in F$. 这时由

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(g(n)) < f(h(n))\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)<h(n)\}$$

及滤子性质知上式左端属于F,于是

$$^*f([g]) = [f\circ g] < [f\circ h] = {}^*f([h]). \qquad \square$$

注 命题2中的"严格增"可改为一般"单调增".

命题3 若f与g交叉递增:

$$i<j\rightarrow f(i)g(j) < f(j)g(i),$$

则$^*f$与$^*g$也交叉递增:

$$x<y\rightarrow {}^*f(x)\,{}^*g(y) < {}^*f(y)\,{}^*g(x).$$

证 设$x=[h]$,$y=[l]$($h,l\in{}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$)且$[h]<[l]$即

$$\{n\in\mathbf{N}\mid h(n)<l(n)\}\in F.$$

由f与g的交叉递增性知

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(h(n))g(l(n)) < f(l(n))g(h(n))\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid h(n)<l(n)\},$$

由滤子性质知上式右端属于F,于是

$$[f\circ h][g\circ l] < [f\circ l][g\circ h],$$

此即

$$^*f([h])\,{}^*g([l]) < {}^*f([l])\,{}^*g([h]). \qquad \square$$

注 命题3中的严格"交叉递增"可改为非严格一般"交叉增".

现在我们有了一个新的结构:

$$\langle {}^*\mathbf{N},[0],[1],+,\cdot,{}^*f,{}^*g,\cdots\rangle,$$

这个结构与原来我们熟悉的结构

$$\langle\mathbf{N},0,1,+,\cdot,f,g,\cdots\rangle$$

之间有密切关系,它们是有相同语言的结构,有相互对应的运算与常元.

五、$^*\mathbf{N}$ 的封闭子集 $\overline{\mathbf{N}}$

下面把函数值取常值 m 的自然数函数就简单写成 m，它的等价类是

$$[m] = \{g \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N} \mid g =_F m\}.$$

关于这些常值函数的等价类，我们有：

$$m < n \to [m] < [n], \qquad (\text{由}\ ^*\mathbf{N}\ \text{上序的定义}) \qquad (7)$$

$$[m] + [n] = [m + n], \qquad (\text{由}(1)) \qquad (8)$$

$$[m] \cdot [n] = [m \cdot n], \qquad (\text{由}(2)) \qquad (9)$$

$$^*f([n])(= [f \circ n]) = [f(n)]. \qquad (\text{由}(6)) \qquad (10)$$

记

$$\overline{\mathbf{N}} = \{[m] \mid m \in \mathbf{N}\} = \{[0],[1],\cdots,[m],\cdots\}.$$

由(8),(9),(10)我们看到，$\overline{\mathbf{N}}$(关于 $^*\mathbf{N}$ 上的运算)是 $^*\mathbf{N}$ 的封闭子集.

$^*\mathbf{N}$ 中除 $[m]$ 这样的常值函数等价类外，还有许多别的等价类. 一个重要例子是恒等函数的等价类. 用 id 表示恒等函数：

$$\forall n \in \mathbf{N}(\mathrm{id}(n) = n).$$

记 $\sigma = [\mathrm{id}]$. 则 $\sigma \notin \overline{\mathbf{N}}$，即 $\forall m \in \mathbf{N}(\sigma \neq [m])$. 事实上，因 $\mathrm{id}(n) = n$，对任意取定的 m 便有

$$\{n \in \mathbf{N} \mid \mathrm{id}(n) = m\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n = m\} = \{m\} \notin F$$

(注意 F 是非主超滤，不含有限集)，这说明 $\mathrm{id} \neq_F m$ 即 $\sigma \neq [m]$.

按函数 $^*f$ 的定义((6)式)，它对 σ 的取值是

$$^*f(\sigma) = {}^*f([\mathrm{id}]) = [f \circ \mathrm{id}] = [f]. \qquad (11)$$

例 1　设 $f(n) = 2n$，$g(n) = n^2$，则 $^*f(\sigma) = 2\sigma$，$^*g(\sigma) = \sigma^2$. 事实上，由(11)，

$$^*f(\sigma) = [f] = [\mathrm{id} + \mathrm{id}] = [\mathrm{id}] + [\mathrm{id}] = \sigma + \sigma(= 2\sigma),$$

$$^*g(\sigma) = [g] = [\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}] = [\mathrm{id}] \cdot [\mathrm{id}] = \sigma \cdot \sigma(= \sigma^2).$$

既然 $^*\mathbf{N} - \overline{\mathbf{N}} \neq \varnothing$，那么要问：$\overline{\mathbf{N}}$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中处于什么位置? 下面命题 4 告诉我们，按 $^*\mathbf{N}$ 中序，$\overline{\mathbf{N}}$ 是 $^*\mathbf{N}$ 的前段：

命题 4　任一 $\tau \in {}^*\mathbf{N} - \overline{\mathbf{N}}$ 皆大于 $\overline{\mathbf{N}}$ 中所有元素：

$$\forall m \in \mathbf{N}(\tau > [m]).$$

证　设 $\tau = [f] \notin \overline{\mathbf{N}}$，$m \in \mathbf{N}$. 为证 $\tau > [m]$，反设 $[f] \leqslant [m]$，即

$$\{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \leqslant m\} \in F.$$

记 $a_k = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) = k\}$，则有

$$\{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \leqslant m\} = a_0 \cup a_1 \cup \cdots \cup a_m.$$

由4.4.1命题1推论知必有某个$a_k \in F(k \leqslant m)$，即$f =_F k$，这说明

$$\tau = [f] = [k] \in \overline{\mathbf{N}},\text{矛盾}. \qquad \square$$

六、N嵌入$^*\mathbf{N}$

N可以用下面自然的方法嵌入$^*\mathbf{N}$中去. 令

$$H(n) = [n](\in \overline{\mathbf{N}} \subset {}^*\mathbf{N}),$$

映射$H:\mathbf{N} \to {}^*\mathbf{N}$具有性质

$$m < n \to H(m) < H(n), \qquad (\text{由}(7))$$

$$H(m+n) = H(m) + H(n), \qquad (\text{由}(8))$$

$$H(m \cdot n) = H(m) \cdot H(n), \qquad (\text{由}(9))$$

$$H(f(n)) = {}^*f([n]). \qquad (\text{由}(10))$$

上述性质说明H是N到$\overline{\mathbf{N}}(\subset {}^*\mathbf{N})$的保运算、保序双射($H$的值域是$\overline{\mathbf{N}}$，$H$的保序性决定了$H$是单射)，且$H(0)=[0]$，$H(1)=[1]$. 我们说N与$\overline{\mathbf{N}}$同构，并说$H$把N同构嵌入$^*\mathbf{N}$.(类似的嵌入过程见前面的§4.2与§4.3.)

到这时，我们可以把$[n]$简单地写成n，称作新自然数(新旧自然数符号不作区分)，于是$\overline{\mathbf{N}}$成了N，且说N被扩张成为$^*\mathbf{N}$. 现在的0是(旧)自然数的常值0函数的等价类.

自然数运算性质在$^*\mathbf{N}$中都保持，说明$^*\mathbf{N}$对N的扩张有一定保真性. $^*\mathbf{N}$是一种新算术模型.

把$[n]$写成n，则(10)式可写成

$$^*f(n) = f(n). \qquad (12)$$

此式说明$^*f$是f从N到$^*\mathbf{N}$的扩张.

如果把$f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$写成自然数列:

$$n_0, n_0, n_2, \cdots, n_k \cdots \quad (\text{其中 } n_k = f(k)).$$

那么对应的$^*f: {}^*\mathbf{N} \to {}^*\mathbf{N}$则可写成(注意(12)):

$$n_0, n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots, n_\tau, \cdots \quad (\text{其中 } n_\tau = {}^*f(\tau)).$$

这是原数列的自然延伸. 每个自然数列都可看作一个自然数函数、都有该数列的相应的自然延伸.

例如，偶数列与平方数列的自然延伸分别是(参见例1):

$$0,2,4,6,\cdots,2n,\cdots,2\sigma,\cdots,$$

$$0,1,4,9,\cdots,n^2,\cdots,\sigma^2,\cdots.$$

4.4.3 小结

新算术模型$^*\mathbf{N}$作为N的一种扩张，是一种$\{0,1,+,\cdot,f,g\cdots\}$型结构，

其上运算保留了 $\mathbf{N}$ 上相应算的性质. 特别, ${}^*\mathbf{N}$ 具有 $\mathbf{N}$ 的 13 条基本的运算性质:

加法交换律,结合律;

乘法交换律,结合律及对加法的分配律;

0 与 1 的性质: $0\neq 1, x+0=x, x\cdot 1=x$;

序的性质:

1° (反自反性) $x \not< x$.

2° 可递性 $(x<y \wedge y<z) \to x<z$.

3° 三分律 $x<y \vee x=y \vee y<x$.

4° 加法保序性 $x<y \to x+z<y+z$.

5° 乘法保序性 $(x<y \wedge z\neq 0) \to xz<yz$.

记 $\mathbf{N}_\infty = {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$. $\mathbf{N}_\infty \neq \varnothing$, 例如 $\sigma \in \mathbf{N}_\infty$(见例 1 前 σ 的定义). $\mathbf{N}$ 是 ${}^*\mathbf{N}$ 的前段(命题 4):

命题 4' $\forall \tau \in \mathbf{N}_\infty \forall n \in \mathbf{N}(\tau > n)$.

${}^*\mathbf{N}$ 的形象是:

$$0,1,2,\cdots,n,\cdots,\sigma,\sigma+1,\cdots$$

任一 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 都有自然扩张 ${}^*f: {}^*\mathbf{N} \to {}^*\mathbf{N}(\forall n \in \mathbf{N}\ {}^*f(n)=f(n))$. 或者说,任一自然数序列都有它的自然延伸.

命题 1,2,3 可用序列语言写成.

命题 1' 设 p_n, q_n 为二自然数列. 若 $p_n < q_n (n \in \mathbf{N})$, 则 $p_\tau < q_\tau (\tau \in \mathbf{N}_\infty)$.

命题 2' 若自然数序列 p_n 严格增,则其自然延伸也严格增:

$$p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots < p_\sigma < p_{\sigma+1} < \cdots.$$

命题 3' 若二自然数序列 p_n 与 q_n 交叉递增:

$$\forall i,j \in \mathbf{N}(i<j \to p_i q_j < p_j q_i),$$

则上式把 $\mathbf{N}$ 改为 ${}^*\mathbf{N}$ 后也成立. 特别,总有

$$p_n q_\tau < p_\tau q_n \quad (n \in \mathbf{N}, \tau \in \mathbf{N}_\infty).$$

注 命题 1',2',3' 中的严格不等号"$<$"可全改为"$\leqslant$"(参见命题 1,2,3 注).

${}^*\mathbf{N}$ 的仅以上列出的性质便可使我们用它做很有意义的事情. 至于 ${}^*\mathbf{N}$ 的具体构造(${}^\mathbf{N}\mathbf{N}$ 关于 $=_F$ 的商集)往下并不重要. 事实上,还可用其他方法来构造或引入 ${}^*\mathbf{N}$(参见第五章及第十一章).

§4.5 一种特殊的非 Archimedes 序域 ——从 *N 到 *Q

我们在§4.2 中由 **N** 出发构造了整数集 **Z**，由 **N** 上运算的 13 条基本性质推出了 **Z** 的性质(见 4.2 附). 现在让我们用上节得到的 *N 来代替 **N**，采用由 **N** 到 **Z** 的完全相同的程序，几乎逐字逐句地重复，便得到比 **Z** 更大的 *Z. *Z 上运算性质与 **Z** 的性质相同，原因是 *N 也具有运算的 13 条基本性质(试将§4.2 附与 4.4.2 小结加以比较).

与 **Z** 一样，*Z 多出了一条重要性质：每个元素有惟一的负元，从而在 *Z 中可以做减法.

*Z 的形象是：

$$\cdots, -\sigma, \cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \sigma\cdots.$$

有了 *Z，再向前，按照§4.3 中由 **Z** 到 **Q** 的完全相同的程序，几乎逐字逐句地重复，便得到比有理数集 **Q** 更大的 *Q. *Q 与 **Q** 的成员都是分数 q/p($p \neq 0$)，不同的是，对 **Q**，p 与 q 取自 **Z**；对 *Q，p 与 q 取自 *Z：

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \mid p \neq 0, \quad p, q \in \mathbf{Z} \right\},$$

$$^*\mathbf{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \mid p \neq 0, \quad p, q \in {}^*\mathbf{Z} \right\}.$$

关于四则运算(包括涉及绝对值)及序，*Q 与 **Q** 有相同的性质，这些性质分别来自 *Z 与 **Z** 的四则运算及序的性质.

现将 **Q** 与 *Q 的基本性质列出如下.

1° $(x+y)+z = x+(y+z)$. (+结合律)

2° $x+0=x$.

3° $\forall x \exists y(x+y=0)$. (负元存在)

4° $x+y=y+x$. (+交换律)

5° $(x\cdot y)z = x\cdot(y\cdot z)$. (·结合律)

6° $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,
$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$. (分配律)

7° $x\cdot y = y\cdot x$. (·交换律)

8° $1\neq 0$.

9° $x\cdot 1 = x$.

10° $\forall x\neq 0 \exists y(x\cdot y=1)$. (·逆元存在)

$$\left.\begin{array}{ll}11^\circ & x \not< x. \\ 12^\circ & (x<y \wedge y<z) \rightarrow x<z. \\ 13^\circ & x<y \vee x=y \vee y<x.\end{array}\right\}\qquad \text{(全序性)}$$

14°　$x<y \rightarrow x+z<y+z.$　　(+保序性)

15°　$(x<y \wedge z>0) \rightarrow x\cdot z<y\cdot z.$　　(·保序性)

上述 15 条性质被称作序域性质. 我们见到了两个具体的序域结构:

$$\langle \mathbf{Q}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$$
$$\langle {}^*\mathbf{Q}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle.$$

得到 $^*\mathbf{Q}$ 的过程是分步实现的:

$$\mathbf{N} \subset {}^*\mathbf{N} \subset {}^*\mathbf{Z} \subset {}^*\mathbf{Q} = \left\{\frac{q}{p} \mid p, q \in {}^*\mathbf{Z}, p \neq 0\right\}.$$

下面是 $^*\mathbf{Q}$ 中的一些具体元素例子(按大小顺序写出):

$$\frac{1}{\sigma^2}, \frac{1}{\sigma+3}, \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma-2}, \frac{3}{2\sigma}, \frac{3\sigma}{2\sigma+1}, \frac{3}{2}, \frac{3\sigma}{2\sigma-1}, \sigma, \frac{3\sigma}{2}.$$

$^*\mathbf{Q}$ 中元素有两种,一种其绝对值比任何自然数都大,如 $\sigma, -\frac{3\sigma}{2}$,等等;另一种叫做 $^*\mathbf{Q}$ 的有限元素,它们形成了 $^*\mathbf{Q}$ 的一个重要子集:

$$\mathbf{Q}_< = \{x \in {}^*\mathbf{Q} \mid \exists k \in \mathbf{N} \mid x \mid \leqslant k\}.$$

$\mathbf{Q}_<$ 叫做 $^*\mathbf{Q}$ 的 Archimedes 子集. 这是因为 $\mathbf{Q}_<$ 的每个元素 x 都具有的性质

$$\exists k \in \mathbf{N} \mid x \mid \leqslant k$$

被人们叫做 Archimedes 性质. 这一性质意味着量的有限可测量性. 作为序域, $^*\mathbf{Q}$ 是一种非 Archimedes 序域.

思考题 1　$\mathbf{Q}_<$ 是 $^*\mathbf{Q}$ 的子域吗?

§4.6　重要练习二: $\mathbf{Q}_<$ 的一个分类

本节是关于等价关系与等价类的又一重要但并不复杂的练习. 练习的结果达到我们的一个重要目标——构造实数.

上节我们由 $^*\mathbf{N}$ 出发构造了非 Archimedes 序域 $^*\mathbf{Q}$:

$$^*\mathbf{Q} = \left\{\frac{q}{p} \mid p, q \in {}^*\mathbf{Z}, p \neq 0\right\}.$$

$^*\mathbf{Q}$ 中四则运算及序的性质与有理数集 $\mathbf{Q}$ 相同,练习中可自由运用. $^*\mathbf{Q}$ 的 Archimedes 子集 $\mathbf{Q}_<$ 由 $^*\mathbf{Q}$ 中的所有有限元素组成:

$$\mathbf{Q}_< = \{x \in {}^*\mathbf{Q} \mid \exists k \in \mathbf{N}(\mid x \mid \leqslant k)\}.$$

$^*\mathbf{Q}$的另一重要子集是

$$\mathbf{I}=\left\{\alpha\in{}^*\mathbf{Q}\mid\forall k\in\mathbf{N}-\{0\}\left(|\alpha|<\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

1. 关于$\mathbf{Q}_<$，试证：若$x,y\in\mathbf{Q}_<$，则

(1) $x+y\in\mathbf{Q}_<$.

(2) $x\cdot y\in\mathbf{Q}_<$.

2. 关于$\mathbf{I}$，试证：

(1) $\mathbf{I}\subset\mathbf{Q}_<$.

(2) $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\to\alpha+\beta\in\mathbf{I}$.

(3) $\alpha\in\mathbf{I}\wedge x\in Q_<\to x\cdot\alpha\in\mathbf{I}$.

我们把$\mathbf{I}$的元素叫做无穷小.

3. 在$\mathbf{Q}_<$中定义二元关系$\sim$：

$$x\sim y\leftrightarrow x-y\in\mathbf{I}.$$

证明$\sim$是$\mathbf{Q}_<$上的等价关系.

记$x(\in\mathbf{Q}_<)$的等价类为$[x]=\{y\in\mathbf{Q}_<\mid y\sim x\}$. 所有等价类的集$\mathbf{Q}_</\sim=\{[x]\mid x\in\mathbf{Q}_<\}$. 在$\mathbf{Q}_</\sim$中定义运算：

$$[x]+[y]=[x+y],\quad [x]\cdot[y]=[x\cdot y].$$

4. 验证加法定义的合理性，即：$x\sim x_1\wedge y\sim y_1\ \to x+y\sim x_1+y_1$.

5. 验证乘法定义的合理性，即：$x\sim x_1\wedge y\sim y_1\ \to x\cdot y\sim x_1\cdot y_1$.

6. 验证运算性质：

1° $[x]+[y]=[y]+[x]$.

2° $([x]+[y])+[z]=[x]+([y]+[z])$.

3° $[x]+[0]=[x]$.

4° $[x]+[-x]=[0]$.

5° $[x]\cdot[y]=[y]\cdot[x]$.

6° $([x]\cdot[y])\cdot[z]=[x]\cdot([y]\cdot[z])$.

7° $[x]\cdot[1]=[x]$.

8° $[1]\neq[0]$.

9° $[x]\neq[0]\to\frac{1}{x}\in\mathbf{Q}_<$且$[x]\left[\frac{1}{x}\right]=[1]$.

10° $[x]\cdot([y]+[z])=[x]\cdot[y]+[x]\cdot[z]$.

具有性质1°～10°的结构$\langle\mathbf{Q}_</\sim,+,\cdot,[0],[1]\rangle$是个域.

在$\mathbf{Q}_<$"$\sim$中定义序：

$$[x]<[y]\leftrightarrow x<y\text{ 且 }x\not\sim y.$$

7. 验证序的定义的合理性. 即：

$$x \sim x_1, y \sim y_1, x < y, x \not\sim y \rightarrow x_1 < y_1 \text{ 且 } x_1 \not\sim y_1.$$

注 不能只用 $x<y$ 定义 $[x]<[y]$. 例如 $1<1+\frac{1}{\sigma}$, 但 $[1]=\left[1+\frac{1}{\sigma}\right]$.

8. 验证序的性质:

11° $[x]\not<[x]$ (反自反性).

12° $[x]<[y],[y]<[z]\rightarrow[x]<[z]$ (可递性).

13° $[x]<[y]\vee[x]=[y]\vee[y]<[x]$ (三分律).

14° $[x]<[y]\rightarrow[x]+[z]<[y]+[z]$.

15° $[x]<[y]$ 且 $[z]>[0]$ 时 $[x]\cdot[z]<[y]\cdot[z]$.

9. 证明 $x<y\rightarrow[x]\leqslant[y]$.

题 6,8 中的性质 1°~15°说明结构

$$\langle \mathbf{Q}_< / \sim, +, \cdot, <, [0], [1] \rangle$$

是个序域.

§4.7 什么是实数?

上节关于等价关系与分类的练习使我们得到一个新的序域 $\mathbf{Q}_</\sim$,它具有序域的 15 条性质(题 6 与题 8 中的性质 1°~15°),我们把它记成 $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_< / \sim = \{[x] \mid x \in \mathbf{Q}_<\},$$

其中

$$[x] = [y \in \mathbf{Q}_< \mid x \sim y],$$

$$x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbf{I},$$

$$\mathbf{Q}_< = \{x \in {}^*\mathbf{Q} \mid \exists k \in \mathbf{N} \mid x \mid < k\},$$

$$\mathbf{I} = \{x \in \mathbf{Q}_< \mid \forall k \in \mathbf{N} - \{0\} \mid x \mid < \frac{1}{k}\} \text{(无穷小集)}.$$

$\mathbf{R}$ 是我们继有理数域 $\mathbf{Q}$ 及其扩张域 ${}^*\mathbf{Q}$ 之后见到的第三个序域. 它们之间有什么差别,是本节要研究的重要课题.

一、Q 嵌入 R

在 ${}^*\mathbf{Q}$ 这个序域中,$\mathbf{Q}$ 这个子序域处在什么位置? $\mathbf{Q}$ 是我们熟悉的,它具有 Archimedes 性质:

$$\forall r \in \mathbf{Q} \exists k \in \mathbf{N} \mid r \mid \leqslant k.$$

按 $\mathbf{Q}_<$ 的定义,$\mathbf{Q}_<$ 是 ${}^*\mathbf{Q}$ 的 Archimedes 子集,所以有 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}_<$.

$\mathbf{Q}$ 与 ${}^*\mathbf{Q}$ 这个序域之间的差别是:前者是 Archimedes 序域,后者是非 Archimedes 序域. (例如,${}^*\mathbf{Q}$ 中的元素 σ 便不具备 Archimedes 性质,见 4.4.2

小结命题 4′.) $\mathbf{Q}_<$ 虽具有 Archimedes 性质,但可惜不是域(§4.5 思考题 1).这是我们把 $\mathbf{Q}_<$ 剖分成 $\mathbf{R}$ 的原因:$\mathbf{R}$ 是我们所需要的序域.

既然 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}_<$,$\mathbf{R}$ 就有了一个子集 $\overline{\mathbf{Q}}$:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \{[r] \mid r \in \mathbf{Q}\},$$

它由全部有理数的等价类组成. 按等价类运算的定义(§4.6),对 $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$,有

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2], \quad [r_1]\cdot[r_2] = [r_1 \cdot r_2]. \tag{1}$$

这说明 $\overline{\mathbf{Q}}$ 关于加法与乘法成了 $\mathbf{R}$ 的封闭子集. 为了把 $\mathbf{Q}$ 嵌入 $\mathbf{R}$,令

$$H(r) = [r],$$

$H:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ 便是所要的嵌入映射. 事实上,这时(1)变成

$$H(r_1 + r_2) = H(r_1) + H(r_2), H(r_1 \cdot r_2) = H(r_1)\cdot H(r_2),$$

说明 H 是保运算的. H 的值域是 $\overline{\mathbf{Q}}$. 剩下的问题是:H 是单射吗? 证明 H 的单射性只用证明 H 的保序性:

$$r_1 < r_2 \to [r_1] < [r_2]\ (r_1, r_2 \in \mathbf{Q}). \tag{2}$$

按 $\mathbf{R}$ 中序的定义(§4.6 题 7 前),为证(2)式,当 $r_1 < r_2$ 时,只要证 $r_1 \not\sim r_2$ 即 $r_2 - r_1 \notin \mathbf{I}$ 便可. 考虑

$$\frac{1}{r_2 - r_1} \in \mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}_<,$$

故有 $k\in\mathbf{N}$ 使 $\frac{1}{r_2 - r_1} < k$,由此知 $r_2 - r_1 > \frac{1}{k}$,于是 $r_1 - r_2 \notin \mathbf{I}$. H 的保序性(进而单射性)证毕. 此外,H 的反向保序性也显然成立(用反证法).

H 是 $\mathbf{Q}$ 到 $\overline{\mathbf{Q}}(\subset\mathbf{R})$ 的保运算、保序双射,我们说 $\mathbf{Q}$ 与 $\overline{\mathbf{Q}}$ 同构,并说 H 把 $\mathbf{Q}$ 同构嵌入 $\mathbf{R}$. 往后,当 $r\in\mathbf{Q}$ 时,把 $[r](\in\overline{\mathbf{Q}})$ 简单写成 r,叫做(新)有理数. 于是 $\overline{\mathbf{Q}}$ 成了 $\mathbf{Q}$,从而 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

现在,我们把 $\mathbf{R}$ 叫做实数集. 实数就是有限分数的等价类,由相差为无穷小的有限分数组成. 我们有

$$\mathbf{R} = \left\{\left[\frac{q}{p}\right] \mid p \neq 0, p, q \in {}^*\mathbf{Z}, \exists k \in \mathbf{N}\left(\left|\frac{q}{p}\right| \leqslant k\right)\right\}.$$

我们来看实数零:

$$0(\text{新}) = [0(\text{旧})] = \{x \in \mathbf{Q}_< \mid x \sim 0\} = \mathbf{I}.$$

我们看到,现在的实数零是无穷小集,它有了内部结构.

命题 1(**R** 的 Archimedes 性质)

$$\forall a \in \mathbf{R}\ \exists k \in \mathbf{N} \mid a \mid \leqslant k.$$

证 任取 $a\in\mathbf{R}$. 不妨设 $a>0$(否则讨论 $-a$). 令 $a=[x](>0)$. 这时

$x>0$. 因 $x\in\mathbf{Q}_<$,故有 $k\in\mathbf{N}$ 使 $x\leqslant k$. 由此及§4.6题9得 $a=[x]\leqslant k$.

□

Q 与 **R** 都是 Archimedes 序域. 二者差别何在?

二、R 的完备性

命题 2(Q 在 R 中稠)

$$\forall a,b\in\mathbf{R}(a<b\to\exists r\in\mathbf{Q}(a<r<b)).$$

证　不妨设 $a>0$(否则可向右平移:取充分大自然数 k 使 $0<a+k<b+k$. **R** 的 Archimedes 性质可使 $|a|<k,k\in\mathbf{N}$). 根据 **R** 的 Archimedes 性质取 $n\in\mathbf{N}$ 使 $n>\frac{1}{b-a}>0$,于是 $nb>na+1$. 再取比 na 大的最小自然数 m,于是 $m-1\leqslant na$. 这时有

$$na<m\leqslant na+1<nb,$$

由此得 $a<\frac{m}{n}<b$.　□

注　命题 2 的证明过程说明,**Q** 在 **R** 中稠的性质是任何 Archimedes 序域 **R** 都具有的,不依赖于 **R** 的具体构造.

我们知道任何自然数列在 $^*\mathbf{N}$ 中都有它的自然延伸. 对正有理数列 $r_k=\frac{n_k}{m_k}$,记 $r_\tau=\frac{n_\tau}{m_\tau}(\tau\in\mathbf{N}_\infty)$.

引理 1　在 **R** 中,严格单调递增且有上界的有理数列必有最小上界.

证　设有理数列 $r_i=\frac{m_i}{n_i}$ 满足

$$r_0<r_1<\cdots<r_n<\cdots\leqslant K(\in\mathbf{N}).\tag{3}$$

不妨设 $r_0>0$(否则将该数列向右平移). 由(3)知

$$\forall i\in\mathbf{N}\quad(m_i\leqslant Kn_i),$$

$$\forall i,j\in\mathbf{N}\quad(i<j\to m_in_j<m_jn_i).$$

根据 4.4.2 小结的命题 1'与命题 3',由上二式可得

$$m_\tau\leqslant Kn_\tau,$$

$$\forall i\in\mathbf{N}\quad(m_in_\tau<m_\tau n_i),\ \tau\in\mathbf{N}_\infty.$$

于是有

$$\frac{m_i}{n_i}<\frac{m_\tau}{n_\tau}\leqslant K,i\in\mathbf{N}.\tag{4}$$

上式说明 $\frac{m_\tau}{n_\tau}\in\mathbf{Q}_<$. 记 $a=\left[\frac{m_\tau}{n_\tau}\right](\in\mathbf{R})$. 又由(4)知(参见§4.6练习题9)

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \left(\frac{m_i}{n_i} \leqslant a\right),$$

即 a 是数列 $r_i = \dfrac{m_i}{n_i}$ 的上界. 为证 a 是 r_i 的最小上界,还要证明任一使 $b < a$ 的 b 不会是 r_i 的上界. 为此,取 $p, q \in \mathbf{N}$ 使 $b < \dfrac{p}{q} < a$. 下证存在某个 $\dfrac{m_k}{n_k} > \dfrac{p}{q}$,从而说明 $\dfrac{p}{q}$(进而 b)不是数列 $r_i = \dfrac{m_i}{n_i}$ 的上界. 事实上,若反设

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \left(\frac{m_i}{n_i} < \frac{p}{q}\right),$$

则按 4.4.2 小结的命题 1'可得 $\dfrac{m_\tau}{n_\tau} < \dfrac{p}{q}$,进而得 $a = \left[\dfrac{m_\tau}{n_\tau}\right] \leqslant \dfrac{p}{q}$,与 $\dfrac{p}{q}$ 的取法矛盾. □

本节的目的是:

定理 1(实数完备性) 单调增有上界的实数列必有最小上界.

证 设实数列 x_n 满足

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant K(\in \mathbf{N}).$$

现分以下两种情形讨论.

情形 1, x_n 从某项起恒为常数,这时该常数即为所求的最小上界.

情形 2, x_n 存在严格递增的子数列:

$$x_{n_0} < x_{n_1} < \cdots < x_{n_i} < \cdots \leqslant K.$$

因 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠,故可取有理数列 r_i 满足

$$x_{n_0} < r_0 < x_{n_1} < r_1 < \cdots < r_{i-1} < x_{n_i} < r_i < \cdots \leqslant K.$$

易见三个数列 x_n, x_{n_i}, r_i 有完全相同的上界集,于是由引理 1 断言存在的 r_n 的最小上界就是 x_n 的最小上界. □

具有上面定理 1 中性质的序域 $\mathbf{R}$ 称为完备序域. 分析数学所需要的是完备序域,而有理数域 $\mathbf{Q}$ 不具备这种完备性.

若把引理 1 或定理 1 中的 $\mathbf{R}$ 换成 $\mathbf{Q}$,则其结论不再成立.

例 1 考察

$$1 < 1.4 < 1.41 < 1.414 < \cdots < 1.415 < 1.42 < 1.5 < 2.$$

准确说,令

$$m_k = \max\{n \in \mathbf{N} \mid n^2 \leqslant 2 \times 10^{2k}\}.$$

m_k 满足

$$m_k^2 \leqslant 2 \times 10^{2k} < (m_k + 1)^2.$$

我们有

$$\left(\frac{m_k}{10^k}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m_k+1}{10^k}\right)^2 \quad \left(\text{注意}\left(\frac{m_k}{10^k}\right)^2 \neq 2\right),$$

$$\left[\frac{m_\sigma}{10^\sigma}\right]^2 \leqslant 2 \leqslant \left[\frac{m_\sigma+1}{10^\sigma}\right]^2.$$

令 $a = \left[\frac{m_\sigma}{10^\sigma}\right]$,则 $a^2=2, a=\sqrt{2}$.

思考题 1　讨论无理数的十进小数表示方法.

利用 **N** 的一种特殊扩张 ***N** 代替 **N**,使我们可以用有限分数的等价类来定义实数.在这个意义下,古希腊人用分数表示实数的思想得到了复活.

第五章　结构与模型

上一章建立实数概念的过程中，我们没有涉及特殊的逻辑知识．现在我们回到逻辑，这是第二章的继续．第二章的逻辑准备主要是为第三章展开 ZF 集论所作的准备．

本章介绍结构与模型的初步知识，这些知识与数学各分支关系密切．

集论概念与符号

集 $A_1,\cdots,A_n$ 的 Cartesian 积集，指

$$A_1\times\cdots\times A_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,\cdots,x_n\in A_n\}.$$

若 $R\subset A^n(=A\times\cdots\times A$，$n$ 个 A 的 Cartesian 积集)，则 R 叫做 A 的 n 元关系；此时若 $(x_1,\cdots,x_n)\in R$，则说 $x_1,\cdots,x_n$ 有关系 R，或说 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 在 A 中成立，或说 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 在 A 中为真(否则说 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 在 A 中为假)．我们写：

$$(x_1,\cdots,x_n)\in R\leftrightarrow R(x_1,\cdots,x_n).$$

$$(\text{或}(x_1,\cdots,x_n)\notin R\leftrightarrow\neg R(x_1,\cdots,x_n).)$$

映射(函数) $f:A^n\to A$ 叫做 A 上的 n 元运算．

§5.1　结构的概念与语言

前面已不止一次在具体场合使用过结构这一术语，并已见过一些具体结构的实例．在数理逻辑中，什么是结构？一般地说，一个非空集 A，连同 A 上的若干关系(每个关系有确定的元数)，A 上的若干运算(每个运算有确定的元数)以及 A 的若干特别指定的元素(常元)，就形成了一个结构(structure)，写作：

$$\langle A,R(\text{关系}),\cdots,f(\text{运算}),\cdots,c(\text{常元}),\cdots\rangle.$$

有时把这个结构简单写作 A，并说 A 是语言

$$\mathscr{L}=\{R,\cdots,f,\cdots,c,\cdots\}$$

的结构，或简单地说 A 是一种 $\mathscr{L}$-结构．$\mathscr{L}$的关系符 R 与运算符 f 都有各自确定的元数．

上面所说的结构概念有一个特点：一个结构总与某种语言联系着．在很多

情况下,相应于同一语言 $\mathscr{L}$有多种结构.这时如有必要则在符号上加以区分,如写

$$\langle A, R_A, \cdots, f_A, \cdots, c_A, \cdots\rangle, \langle B, R_B, \cdots, f_B, \cdots, c_B\rangle, \cdots$$

其中 R_A 与 R_B 分别表示 A 上与 B 上相应于同一关系符 R 的各自的 n 元关系(n 是 R 的元数),f_A 与 f_B 分别表示 A 上与 B 上相应于同一运算符 f 的各自的运算(元数是 f 的元数),c_A 与 c_B 分别表示 A 与 B 的特殊元素(相应于同一常元 c).

如上所述,一种语言 $\mathscr{L}$由三部分组成(可以是空集):关系符(谓词),运算符(即函数符)及常元符.我们约定:语言 $\mathscr{L}$中不包括等词(=)和其他逻辑符号,因为这些是各种数学语言都共有的,无须每次重复列出.

有了一种语言,便可用来组词、造句、写文章.按一定规则(详见§2.2)写出的词(项)、句(公式)、文章(证明)这类符号串并没有具体的特定意义,就像是没有灵魂的躯壳;但若与具体的结构联系起来,这些符号串就活了,就有了具体内容.一个形式语句拿到具体结构里,便有了真假之分,有了确定的真假值.以语句 $\forall x \exists y(x+y=0)$ 为例,它在 $\mathbf{N}$ 中为假,在 $\mathbf{Z}$ 中为真,离开具体结构便无真假值.

在 4.4.2 中我们见到了语言

$$\mathscr{L}=\{0,1,+,\cdot,f,g,\cdots\}$$

的两种结构 $\mathbf{N}$ 与 $^*\mathbf{N}$.同一运算符 +,分别相应有 $\mathbf{N}$ 中加法与 $^*\mathbf{N}$ 中加法,二者的定义域与值域是不一样的.同样,任一一元函数符 f 在 $\mathbf{N}$ 中解释为 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,在 $^*\mathbf{N}$ 中则解释为 $^*f: {}^*\mathbf{N}\to {}^*\mathbf{N}$.

在§4.2、§4.3 与§4.5～§4.7 中,我们见到了同一语言

$$\mathscr{L}=\{0,1,<,+,\cdot\}$$

的几种不同结构:$\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$^*\mathbf{Z}$,$^*\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$.这几种结构都有各自的特性,它们的引进都有特殊的目的.

语言与结构适当分离,是数理逻辑的一个特点,这使得对各种数学系统可进行形式的抽象研究.应用到数学时,“具有很大的方法论特点,不同于经典数学中传统的逻辑思维.”[73]

§5.2　同构与同态

同构这一术语前面也不止一次遇见过.同构与同态的概念涉及的是有相同语言的结构之间的关系.本节主要讨论同构的概念.

同一语言的两个结构同构,涵义如下.首先,这两个结构之间存在双射:第

一个结构的每个元素与其在第二个结构(影子集)的某个影子对应.此外,这种一一对应具有以下性质.

第一,“保常元”:第一结构的每个常元与它在第二结构的影子相应于同一个常元符.

第二,“保关系”:相应于同一个关系符,这两个结构各自有同种关系;这种关系在一一对应之下保持,即第一结构中若干元素是否有这种关系(不管是与否),由它们的影子在第二结构中保持着.

第三,“保运算”:相应于同一运算符,这两个结构各自有元数相同的同种运算;这种运算在一一对应之下保持,即第一结构若干元素与它们在第二结构的影子各自进行同种运算,两边的运算结果相对应;也就是说,第一结构中运算结果的影子,恰好是第二结构中影子的运算结果.

下面更精确地用符号重述同构的概念.同一语言 $\mathscr{L}=\{R,\cdots,f,\cdots,c,\cdots\}$ 的两个结构 A 与 B 同构,记作 $A\cong B$,是指存在 A 到 B 的双射 $F:A\to B$,它满足

1° 对 $\mathscr{L}$ 的任一常元符 c,$F(c_A)=c_B$;

2° 对 $\mathscr{L}$ 的任一关系符 R(设 R 为 n 元)及任意 $x_1,\cdots x_n\in A$,

$$R_A(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow R_B(F(x_1),\cdots,F(x_n));$$

3° 对 $\mathscr{L}$ 的任一函数符 f(设它为 n 元)及任意 $x_1,\cdots,x_n\in A$,

$$F(f_A(x_1,\cdots,x_n))=f_B(F(x_1),\cdots,F(x_n)).$$

这时把双射 F 叫做A 到 B 的同构映射,简称为 A 到 B 的同构,并写 $F:A\cong B$.

若 F 是A 到B 的同构,则逆映射 F^{-1}是 B 到A 的同构.同构的复合也是同构.

从数学上抽象地看,同构的两个结构除了形式上不同,本质上实在没有区别.这里说“本质上”没有区别,是指二结构共有的语言所表达的性质对这两个结构没有区别.正因如此,常把同构的结构视为同一.

拿我们在构造整数集 $\mathbf{Z}$ 的过程中见过的例子说,作为语言

$$\mathscr{L}=\{<,+,\cdot,0,1\}$$

的结构,$\mathbf{N}$ 同构于 $\overline{\mathbf{N}}\subset\mathbf{Z}(=\mathbf{N}^2/\sim)$;每个 $n(\in\mathbf{N})$ 以 $\overline{n}(\in\overline{\mathbf{N}})$为影子,这样的一一对应具有同构的保序、保运算性质(详见§4.2):

$$m<n\leftrightarrow\overline{m}<\overline{n},$$

$$\overline{m+n}=\overline{m}+\overline{n},$$

$$\overline{m\cdot n}=\overline{m}\cdot\overline{n},$$

且常元 0,1 分别与 $\overline{0}$,$\overline{1}$ 对应.于是我们把 $\mathbf{N}$ 与 $\overline{\mathbf{N}}$ 视为同一,从而把 $\mathbf{N}$ 嵌入 $\mathbf{Z}$

中.

在 4.4.2 中,作为语言 $\mathscr{L}=\{0,1,+,\cdot,f,g,\cdots\}$ 的结构,$\mathbf{N}$ 与 $^*\mathbf{N}$ 的子结构 $\bar{\mathbf{N}}$ 同构,因为映射

$$H:\mathbf{N}\to\bar{\mathbf{N}}(H(n)=[n]\in\bar{\mathbf{N}})$$

是 $\mathbf{N}$ 到 $\bar{\mathbf{N}}$ 的双射,且具有同构映射的性质:

$$H(0)=[0],\quad H(1)=[1],$$
$$H(m+n)=H(m)+H(n),$$
$$H(m\cdot n)=H(m)\cdot H(n),$$
$$H(f(n))={}^*f([n]).$$

一般地说,在上面用符号叙述的同构概念中,若具有性质 1°,2°,3°的映射 $F:A\to B$ 不是双射,则把 F 叫做 A 到 B 的同态映射,简称为 A 到 B 的同态. 同态比同构要求低. 但在研究各种同类结构之间关系时,在对它们进行比较时,同态是非常灵活的工具.

§5.3　理论与模型

谈到理论,先要有一种语言.

设 $\mathscr{L}$ 是某种语言(它暂时与结构分离). $\mathscr{L}$-的一个理论,写成 $\mathscr{L}$ 理论,就是 $\mathscr{L}$ 的一集语句(语句,即不含自由变元的公式).

理论作为语句集,它是个语法概念. 不涉及具体结构时,理论的实际意义并不明确,但可以从语法角度研究它有无矛盾.(参见 2.2.2. 语句集有矛盾,指从它可证明出公式 p 与 $\neg p$.)

理论中的语句也叫做公理. 除去逻辑公理(永真式,量词公理与等词公理),剩下的公理就是理论的专用公理.

前面曾谈及形式化研究方法的自由:语言和理论(公理)可自由选取,对它们的解释(结构)也可自由选取. 数学中,语言和理论不大会长久与结构分离. 当感兴趣的语言及理论一旦选定,接着往往要寻找实现该理论的结构,即寻找理论的模型.

理论的模型

谈模型,谈的总是某种理论的模型.

设 T 是语言 $\mathscr{L}$ 的一个理论(即 T 是一集 $\mathscr{L}$ 语句). T 的模型,指实现 T 的 $\mathscr{L}$-结构,即是使该理论的所有语句在其中皆成立的结构. 还可重述为:若 $\mathscr{L}$-理论 T 的所有语句都在 $\mathscr{L}$-结构 M 中为真,则说 M 是 T 的一个模型.

下面用具体例子来说明.

1. 群(group)

群理论的语言 $\mathscr{L}=\{*,e\}$,其中 $*$ 为二元运算符,e 为常元(叫做群的恒等元).

群理论只有三个语句(公理):

G1 $\forall x\forall y\forall z((x*y)*z=x*(y*z))$. (结合律)

G2 $\forall x((x*e=x)\wedge(e*x=x))$. (恒等元性质)

G3 $\forall x\exists y((x*y=e)\wedge(y*x=e)$. (逆元存在性)

群理论的模型,称之为群,指满足以上三条公理的相应的结构.群是近世代数的重要研究对象,在数学与自然科学中应用广泛.

例 1 $\langle \mathbf{Z},+,0\rangle$是群.(为什么?)但是结构$\langle \mathbf{N},+,0\rangle$不构成群.(为什么?)这是我们费力构造 $\mathbf{Z}$(见 §4.2)的重要原因.由 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Z}$,是数学上的一大进步.$\langle Z,\cdot,1\rangle$与$\langle N,\cdot,1\rangle$都不是群.(为什么?) 而$\langle \mathbf{Q},\cdot,1\rangle$(见 §4.3)是群.(为什么?) 这是我们又由 $\mathbf{Z}$ 出发去构造 $\mathbf{Q}$ 的原因.

例 2 设 $a=\{x_1,x_2,x_3\}$,令

$$A=a \text{ 到 } a \text{ 的所有双射组成的集.}$$

A 有 6 个元素.用 I 表示恒等映射($I(x_i)=x_i$),则$\langle A,\cdot,I\rangle$是群,其中运算$\cdot$是映射的复合运算.

对群运算没有假设交换律成立.若再加上

G4 $\forall x\forall y(x*y=y*x)$ (交换律)

则 G1～G4 的模型叫做交换群(Abel 群).

例 1 中的$\langle \mathbf{Z},+,0\rangle$就是一个交换群.

2. 环(ring)

环理论的语言 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,0\}$,公理有(省写了语句前的一些量词):

R1 $(x+y)+z=x+(y+z)$. (+结合律)

R2 $x+0=x$.

R3 $\forall x\exists y(x+y=0)$. (负元存在)

R4 $x+y=y+x$. (+交换律)

R5 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$. (·结合律)

R6 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$,
$(x+y)\cdot z=y\cdot x+z\cdot x$. (分配律)

$\langle \mathbf{Z},+,\cdot,0\rangle$满足 R1～R6,是环的例子;$\langle \mathbf{N},+,\cdot,0\rangle$不满足 R3,不是环.

3. 域(field)

语言 $\mathscr{L}=\{+,\cdot,0,1\}$,公理有:

F1～F5 与 R1～R5 同.

F6　$x \cdot y = y \cdot x$.　　（·交换律）

F7　$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.　　（分配律）

F8　$1 \neq 0$.

F9　$1 \cdot x = x$.

F10　$x \neq 0$ 时，$\exists y(x \cdot y) = 1$.　　（·逆元存在）

$\langle \mathbf{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$（见§4.3）满足所有 F1～F10，是域的特例. 但结构 $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ 不是域.（为什么？）**Z** 与 **Q** 的区别是重要的. 在 **Q** 中可以做除法. §4.7 中我们又构造了实数域 **R**.

练习 1　试用实数域 **R** 构造出复数域 **C**.

4. 序域（ordered　field）

语言 $\mathscr{L} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$. 序域除了满足域公理 F1～F10，还满足：

反自反性　$x \not< x$.

可递性　$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$.

三分律　$x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x$.

+保序性　$x < y \rightarrow x + z < y + z$.

·保序性　$x < y \wedge z > 0 \rightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

$\langle \mathbf{Q}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ 与 $\langle \mathbf{R}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ 都是序域，不同的是后者具有完备性，而前者没有.

5.3 附　完备序域的（同构）惟一性

完备序域在同构意义下是惟一的. 可以证明，任何完备序域

$$\langle \bar{\mathbf{R}}, <, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1} \rangle$$

都同构于§4.6, §4.7 中的完备序域（实数域）

$$\langle \mathbf{R}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle.$$

上面的 **R** 与 $\bar{\mathbf{R}}$ 各自都有 + 与·运算，都有序关系<（符号未作区分），都具有序域的 15 条性质（见§5.3, 4）及 Archimedes 性质，且都具有完备性.

R 与 $\bar{\mathbf{R}}$ 间同构映射 φ 的构造过程如下.

第一步令 $\varphi(0) = \bar{0}, \varphi(1) = \bar{1}$.

练习 1　证明　$\bar{0} < \bar{1}$.

第二步，**N** 与 $\bar{\mathbf{N}}$ 对应. 令 $\varphi(n) = \bar{n}$，其中 $\bar{n}$（在 $\bar{\mathbf{R}}$ 中）指 $\overbrace{\bar{1} + \cdots + \bar{1}}^{n \uparrow \bar{1}}$.

练习 2 证明：

1° $\varphi(m+n)=\varphi(m)+\varphi(n)$，即 $\overline{m+n}=\overline{m}+\overline{n}$.

2° $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$，即 $\overline{m\cdot n}=\overline{m}\cdot\overline{n}$.

3° $m<n\rightarrow\varphi(m)<\varphi(n)$，即 $m<n\rightarrow\overline{m}<\overline{n}$.

第三步，$\mathbf{Q}$ 与 $\overline{\mathbf{Q}}$ 对应. 令 $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{\overline{n}}{\overline{m}}$.

练习 3 证明：

1° $\varphi\left(\frac{n}{m}+\frac{q}{p}\right)=\varphi\left(\frac{n}{m}\right)+\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$.

2° $\varphi\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{q}{p}\right)=\varphi\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$.

3° $\frac{n}{m}<\frac{q}{p}\rightarrow\varphi\left(\frac{n}{m}\right)<\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$.

第四步，$\mathbf{R}$ 与 $\overline{\mathbf{R}}$ 对应. 当 $a\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时（$a\in\mathbf{Q}$ 时第三步已有 $\varphi(a)$ 的定义），任取以 a 为最小上界的一个递增有理数列 r_k：

$$r_0<r_1<\cdots<r_k<\cdots$$

由 $\overline{\mathbf{R}}$ 的完备性知 $\overline{\mathbf{R}}$ 中对应的数列 $\overline{r}_k$ 惟一确定了最小上界 $\overline{a}\in\overline{\mathbf{R}}$. 就让这个 $\overline{a}$ 对应于 a：$\varphi(a)=\overline{a}$.

练习 4 证明：

1° $a\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时，$\overline{a}$ 与 $\mathbf{R}$ 中以 a 为最小上界的有理数列 r_k 的选取无关.

2° φ 的保序性：$a<b\rightarrow\varphi(a)<\varphi(b)$（保序性蕴涵单射性）.

3° φ 是满射：$\forall x\in\overline{\mathbf{R}}\,\exists a\in\mathbf{R}\ (\varphi(a)=x)$.

4° φ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的惟一满足 $\forall r\in\mathbf{Q}\ \varphi(r)=\overline{r}$ 的保序双射.

5° $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$.

6° $\varphi(-a)=-\varphi(a)$.

7° $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

§5.4 模型原理及应用例

20 世纪中叶形成的模型论是前半个世纪数理逻辑突飞猛进发展的结果. 作为数理逻辑的一个分支，模型论研究形式语言与其解释（结构）之间的关系，其研究方法具有极大的灵活性，可应用于数学各个分支. 这里介绍模型论的一条基本定理——模型原理.

模型原理 一个理论是无矛盾的，当且仅当它有模型.

模型原理中所说的理论，是某种语言 $\mathscr{L}$ 的理论（即一集 $\mathscr{L}$-语句）：原理中

所说的模型，是一种 $\mathscr{L}$-结构，在其中该理论的所有语句为真.

从第一章所述的几何发展的有关历史可以看出，人们发现并接受被称作是"几何的非标准模型"的非欧几何，经过了数以千年计的顽强努力. 就整个过程来看，这种接受是不得已的，是被动的. 当人们最终用给非欧几何理论建立模型的方法令人信服地证明了该理论的相对无矛盾性之后，该理论才站住了脚跟.

20 世纪里，情形有了变化. 有了数理逻辑及模型论的发展，在模型方法的应用上，人们开始变得主动了. 例如，上述模型原理也有了更积极的应用. 下面介绍模型原理的一个有意义的应用.

模型原理应用例：N 的一种保真扩张[74],[75].

采用包括以下符号的算术语言 $\mathscr{L}$(参见 4.4.2)：

常元符 0，

二元运算符 +，·，

所有从 N 到 N 的一元函数符：s(后继运算符)，$f, g, \cdots$.

如同釉前的约定，这里的算术语言 $\mathscr{L}$ 中未写进等号及其他逻辑符号. $\mathscr{L}$ 中也未包括<，因为它可用 +，= 等符号来定义($x<y$ 即"$x+t=y \wedge t\neq 0$").

N 是标准的 $\mathscr{L}$-结构：

$$\langle \mathbf{N}, 0, +, \cdot, s, f, g, \cdots \rangle.$$

理论的选取是自由的. 我们首先感兴趣的一种理论，用 Th(**N**)表示，它包括所有在标准结构 **N** 中的为真的 $\mathscr{L}$-语句：

$$\mathrm{Th}(\mathbf{N}) = \{\mathscr{L}\text{-语句 } \varphi \mid \varphi \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 中为真}\}.$$

定义本身告诉我们 **N** 是 Th(**N**)的模型，所以 Th(**N**)是无矛盾的(用了模型原理).

任一 $\mathscr{L}$-语句 φ 在 **N** 中或为真，或为假. φ 为真时，$\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbf{N})$；$\varphi$ 为假时，$\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbf{N})$. 下面有几个 $\mathscr{L}$-语句例：

$$\forall x \forall y(y<x\leqslant y+1 \rightarrow x=y+1),$$

$$\forall x(f(x)<g(x)) \rightarrow \forall x(g(x)\neq 0),$$

$$\forall x \exists y(x=s(y)),$$

$$\exists x(1<x<2), \text{其中 } 1=s(0), 2=s(1).$$

前两个语句在 **N** 中为真，故属于 Th(**N**)；后两个语句在 **N** 中为假(s 在 **N** 中解释为"……的后继")，故不属于 Th(**N**) .

往下我们的目标是：寻找 Th(**N**)的与 **N** 不同的其他模型. 为此，在语言 $\mathscr{L}$ 中加进一个新常元 c(语言的选取也是自由的)，将 $\mathscr{L}$ 扩大成为新语言 $\mathscr{L}'$：

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c\} = \{0, c, +, \cdot, s, f, g, \cdots\}.$$

然后,作语言 $\mathscr{L}'$ 的一个新理论 T:

$$T=\mathrm{Th}(\mathbf{N})\cup\{c\neq 0, c\neq 1, c\neq 2, \cdots\}.$$

$\mathbf{N}$ 是个 $\mathscr{L}$_结构,也可以使它成为一个 $\mathscr{L}$_'结构,这只要把新常元 c 解释成 $\mathbf{N}$ 的某个元素即可.但不管把 c 解释成 $\mathbf{N}$ 的哪个元素,$\mathbf{N}$ 也不能成为新理论 T 的模型,因为 $\{c\neq n \mid n\in\mathbf{N}\}(\subset T)$ 中语句不可能同时在 $\mathbf{N}$ 中为真.

但我们可以断言:新理论 T 是无矛盾的! 证明如下.

反设 T 有矛盾.由于从 T 推出矛盾只须用到 T 中的有限个语句(参见2.2.1 中关于证明的紧致性),当我们取一个充分大的 $k\in\mathbf{N}$ 时,便可使 T 的一个充分大片断——下面的理论 T_k 成为有矛盾的理论:

$$T_k=\mathrm{Th}(\mathbf{N})\cup\{c\neq 0, c\neq 1, \cdots, c\neq k\},$$

但这不可能.T_k 是无矛盾的,因为 T_k 有模型.事实上,当我们把新常元 c 解释为 $\mathbf{N}$ 中的 $k+1$ 时,$\mathbf{N}$ 便成了 T_k 的一个模型.这样我们便证明了新理论 T 的无矛盾性.

既然 T 是无矛盾的,根据模型原理便知理论 T 是有模型的.用 $^*\mathbf{N}$ 表示 T 的一个模型.我们已经知道 $\mathbf{N}$ 不会是 T 的模型,所以有 $\mathbf{N}\neq{}^*\mathbf{N}$. $^*\mathbf{N}$ 作为一个 $\mathscr{L}'$_结构,$\mathscr{L}'$ 的每个符号在 $^*\mathbf{N}$ 中都有解释.把 $0,1(=s(0)),2(=s(1))$, $\cdots$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中的解释仍写作 $0,1,2,\cdots$,于是有 $\mathbf{N}\subset{}^*\mathbf{N}$.设 $\mathbf{N}_\infty={}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$,则 $\mathbf{N}_\infty\neq\varnothing$.

就语言 $\mathscr{L}$ 来说,$\mathbf{N}$ 与 $^*\mathbf{N}$ 都是 $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$ 的模型(注意 $T\supset\mathrm{Th}(\mathbf{N})$).这是一个重要事实,它指出 $^*\mathbf{N}$ 对 $\mathbf{N}$ 具有"保真性":对于任一 $\mathscr{L}$_语句 φ,

φ 在 $\mathbf{N}$ 中为真	$\rightarrow \varphi\in\mathrm{Th}(\mathbf{N})$	($\mathrm{Th}(\mathbf{N})$的定义)
	$\rightarrow \varphi$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中为真,	($^*\mathbf{N}$ 是 $T\supset\mathrm{Th}(\mathbf{N})$的模型)

于是有了单向保真;反过来,

φ 在 $\mathbf{N}$ 中为假	$\rightarrow \neg\varphi$ 在 $\mathbf{N}$ 中为真	(排中律)
	$\rightarrow \neg\varphi$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中为真	(已有单向保真)
	$\rightarrow \varphi$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中为假	(矛盾律)

于是我们便证明了下面的结论:

转换原理(保真性) 对于语言 $\mathscr{L}$ 的任何语句 φ,

$$\varphi \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 中为真} \leftrightarrow \varphi \text{ 在 } {}^*\mathbf{N} \text{ 中为真}.$$

$^*\mathbf{N}$ 是个 $\mathscr{L}'$_结构,同时,它当然也是个 $\mathscr{L}$ 结构,因为 $\mathscr{L}\subset\mathscr{L}'$.这样我们有了互为保真假的两个 $\mathscr{L}$_结构:$\mathbf{N}$ 与 $^*\mathbf{N}$. $\mathbf{N}$ 是 $^*\mathbf{N}$ 的子结构.$\mathscr{L}$ 中的任一运算符在 $^*\mathbf{N}$中解释的运算是同一运算符在 $\mathbf{N}$ 中解释的运算的扩张.

从转换原理的证明过程可以看到,我们在应用保真性时,严格要求涉及的语句是能用语言 $\mathscr{L}$ 写出的语句.这一点在应用时必须注意.例如,语句

$$\forall x(n<x\leqslant n+1\rightarrow x=n+1)$$

是个 $\mathscr{L}$- 语句,它在 **N** 与 ***N** 中同真假.

练习 1　证明: $(\tau\in\mathbf{N}_\infty\wedge n\in\mathbf{N})\rightarrow\tau>n$.

利用模型原理,我们证明了 ***N**(**N** 的保真扩张)的存在性. 语言 $\mathscr{L}$ 的选择自由形成了 ***N** 的多样性. 这里我们只感兴趣其中的一种. 这种 ***N** 实际上在 4.4.2 中已经见到,当时给出了它的一种具体构造. 下面的附录及第十一章还将给出 ***N** 的其他构造.

我们为什么对这种算术模型 ***N** 特别感兴趣? 前面我们看到(§4.5～§4.7),这种 ***N** 是特殊选定的语言 $\mathscr{L}$ 的结构,可用来构造实数. 更重要的是,对 ***N** 的任何深入的认识都会加深人们对 **N** 的认识. 此外,这种 ***N** 很有希望成为从一个侧面认识离散与连续之间复杂关系的一种特殊工具. 算术模型涉及数学的深层基础. 一般说来,涉及数学基础的越深层,影响面也越大.

1933 年,挪威数学家斯科伦(T. Skolem, 1887～1963)从数理逻辑特有的视角观察与思索,成功地构造出自然数理论的一个新模型,它与人们几千年来所熟悉的不同[76]. 这一成果值得引起人们的重视,不仅是因为构造新模型时所用的方法(即后来的超积与超幂)在数学中有广泛的应用,更重要的原因是:这一算术模型不是仅凭直观所能想象得出来的,而一种超常创造性思维的结晶,这种思维表现出不同寻常的主动精神. 至于各种新型算术模型的意义及将要起的作用,现在还难以估计.

5.4 附　*N 的另一种构造

我们在 4.4.2 中用一般数学方法构造了一种特殊的算术模型 ***N**,没有依赖任何特殊的逻辑知识. §5.4 中应用模型原理一般地得到这种模型的存在性. 现在我们给出这种特殊算术模型的另一种构造法.

仍用 5.4 中的算术语言

$$\mathscr{L}=\{0,+,\cdot,f,g,\cdots\},$$

$\mathscr{L}$ 含常元符 0,二元函数 $+,\cdot$ 以及所有从 **N** 到 **N** 的一元函数符 $f,g,\cdots$. 语言 $\mathscr{L}$ 既简单,又有很强的表达能力,它能表示出 **N** 上的所有关系与函数. 以序为例:

$$x<y\leftrightarrow\exists t(t\neq 0\wedge x+t=y).$$

我们知道,逻辑符号 $\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\forall$ 等可以用 $\neg,\wedge,\exists$ 这三种符号表示:

$$p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q),$$
$$p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q,$$
$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p),$$
$$\forall x p \leftrightarrow \neg \exists x \neg p.$$

于是可以说：任一 $\mathscr{L}_-$ 公式能由 $\mathscr{L}_-$ 等式经有限次使用$\neg$，$\wedge$及量词$\exists$得到.

方程，原指含变元的等式. 注意事实：任何含至多一个自由变元的 $\mathscr{L}_-$ 公式都有与之同解的 $\mathscr{L}$ 方程. 事实上，对于公式 $\varphi(x)$，令

$$f(n)=\begin{cases}1, & \varphi(n)\text{在 }\mathbf{N}\text{ 中为真},\\ 0, & \varphi(n)\text{在 }\mathbf{N}\text{ 中为假}.\end{cases}$$

于是 $\varphi(x)$与方程 $f(x)=1$ 同解.（解，指自然数解.）

考虑到上述事实，为了方便，这里对方程一词作广义理解：方程，指至多含一个自由变元的 $\mathscr{L}$ 公式（关于公式与语句，详见 2.2.1）. 方程 $\varphi(x)$有解，指存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $\varphi(n)$在 $\mathbf{N}$ 中为真. 当方程 $\varphi(x)$中 x 不出现时，$\varphi(x)$便是语句. 语句（不含自由变元的公式）视为特殊方程. 一个语句若在 $\mathbf{N}$ 中为真，则它的解集为 $\mathbf{N}$，它属恒真式之列；若它在 $\mathbf{N}$ 中为假，则它的解集为$\varnothing$，它属恒假式之列.

一、极大相容方程组

方程组相容，指组中任意有限个方程联立有解. 不相容的方程组叫做矛盾方程组.

例 1 易见下面的方程组是相容的：

$$\Gamma_0(x)=\{x>0, x>1, x>2, \cdots, x>n, \cdots\}.$$

相容方程组 $\Gamma(x)$为极大，指 $\Gamma(x)$不能再相容地扩大，即满足：

$$\varphi(x)\notin\Gamma(x) \to \Gamma(x)\cup\{\varphi(x)\}\text{为矛盾方程组}.$$

极大相容方程组是很多的，请看下例：

例 2 设 $\Gamma(x)=\{\gamma(x)\mid\gamma(1)\text{在 }N\text{ 中为真}\}$. $\Gamma(x)$包括 1 所满足的全部方程，是个极大相容方程组. 事实上，这个 $\Gamma(x)$不能再相容地扩大：

$$\begin{aligned}\varphi(x)\notin\Gamma(x) &\to \varphi(1)\text{在 }\mathbf{N}\text{ 中为假}\\ &\to \neg\varphi(1)\text{在 }\mathbf{N}\text{ 中为真}\\ &\to \neg\varphi(x)\in\Gamma(x)\\ &\to \Gamma(x)\cup\{\varphi(x)\}\text{有矛盾}.\end{aligned}$$

为了方便，有时将方程组 $\Gamma(x)$与方程 $\varphi(x)$分别简写为 Γ 与 φ. 当 Γ 为极大相容方程组时，易见：

$\varphi \in \Gamma \leftrightarrow$ 任取 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in \Gamma$, φ 与 $\gamma_1, \cdots, r_m$ 皆联立有解.(往右,相容性;往左,极大性.) (1)

极大相容方程组的性质

设 Γ 是个极大相容方程组,则它有以下性质:

1° Γ 不含任何矛盾方程(即恒假式),但含所有恒真式(在这里,恒真或恒假皆指在 $\mathbf{N}$ 中恒真或恒假).特别有 $\Gamma \supset \mathrm{Th}(\mathbf{N})$.($\mathrm{Th}(\mathbf{N})$指在 $\mathbf{N}$ 中为真的 $\mathscr{L}$ 语句集.)

2° $(\varphi_1 \in \Gamma \wedge \varphi_2 \in \Gamma) \leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$.

3° 或 $\varphi \in \Gamma$,或 $\neg\varphi \in \Gamma$,(对任何方程 φ)二者必居其一.

4° $(\varphi \in \Gamma \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma) \rightarrow \psi \in \Gamma$.

1°与 2°显然.

3°的证明 反设 $\varphi(x) \notin \Gamma$ 且 $\neg\varphi(x) \notin \Gamma$,那么根据(1)以下事实成立:

存在 $\gamma_1(x), \cdots, \gamma_m(x) \in \Gamma$ 使 $\varphi(x), \gamma_1(x), \cdots, \gamma_m(x)$联立无解, (2)

存在 $\bar{\gamma}_1(x), \cdots, \bar{\gamma}_k(x) \in \Gamma$ 使$\neg\varphi(x), \bar{\gamma}_1(n), \cdots, \bar{\gamma}_k(x)$联立无解. (3)

但由 Γ 的相容性知 $\gamma_1(x), \cdots, \gamma_m(x), \bar{\gamma}_1(x), \cdots, \bar{\gamma}_k(x)$ 这 $m + k$ 个方程联立有解,取一解设为 n.对此 n,或 $\varphi(n)$在 $\mathbf{N}$ 中为真,或$\neg\varphi(n)$在 $\mathbf{N}$ 中为真;这与事实(2)或事实(3)产生矛盾.性质 3°证毕.

4°的证明 反设 $\psi \notin \Gamma$,则由 3°知$\neg\psi \in \Gamma$.再由 2°知 $\varphi \wedge \neg\psi \in \Gamma$.这与 $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ 矛盾,因为下面的公式是永假式:

$$\varphi \wedge \neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi).$$

二、$^*\mathbf{N}$ 的构造

在 $\mathscr{L}$中加入新常元符 σ:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{\sigma\} = \{0, \sigma, +, \cdot, f, g, \cdots\}.$$

现在用语言 $\mathscr{L}'$ 中的常元符 0 与 σ 组词,组词时不使用变元.所有 $\mathscr{L}'$-词(word)的集记作 W.准确地说,

(i) $0, \sigma \in \mathbf{W}$,

(ii) $t \in \mathbf{W} \rightarrow f(t) \in \mathbf{W}$(对任何一元函数符 f),

(iii) $t, u \in \mathbf{W} \rightarrow t + u \in \mathbf{W}, t \cdot u \in \mathbf{W}$.

以上三条规则形成了 W 的全部元素(全部 $\mathscr{L}'$-词).或者说,W 由所有不含变元的 $\mathscr{L}'$-项组成.(关于项,见 2.2.1.)当我们把 W 的一般元素写成 $t(\sigma)$时,σ 可以不在其中出现.

可以看出,$\mathbf{W}$ 本身是一个 $\mathscr{L}'$-结构

$$\langle \mathbf{W}, 0, \sigma, +, \cdot, f, g, \cdots \rangle,$$

但这个结构 W 并不是最终想要的结构.在 W 中,像 $\sigma+s(0)$ 与 $s(0)+\sigma$ 这样两个元素不是同一个元素(s 是后继函数符),而是两个不同的词.为了得到想要的算术模型,我们设法对 W 进行分类.

任取一极大相容方程组 $\Gamma(x)$.利用取定的这个 $\Gamma(x)$ 便可定义 W 上的一种等价关系如下.

设 $t(\sigma),u(\sigma)\in W$,规定

$$t(\sigma)\sim u(\sigma)\quad\leftrightarrow\quad(t(x)=u(x))\in\Gamma(x),\tag{4}$$

易见上式定义的关系是 W 上的等价关系.(验证等价性时用到极大相容方程组的性质.)

将所有等价类的集(商集)记作 $^*\mathbf{N}$:

$$^*\mathbf{N}=\{[t]\mid t\in W\}(=W/\sim),$$

其中 $[t]=\{u\in W\mid u\sim t\}$.

在 $^*\mathbf{N}$ 中定义运算:

$$[t]+[u]=[t+u],\tag{5}$$

$$[t]\cdot[u]=[t\cdot u],\tag{6}$$

$$f([t])=[f(t)].\tag{7}$$

运算定义合理性的验证

设 $t(\sigma)\sim t_1(\sigma)$,即 $t(x)=t_1(x)\in\Gamma$.因 Γ 含有恒真式

$$t(x)=t_1(x)\rightarrow f(t(x))=f(t_1(x))\text{(等词公理)},$$

由 Γ 的极大相容性质 4°:

$$f(t(x))=f(t_1(x))\in\Gamma,\text{即 } f(t(\sigma))\sim f(t_1(\sigma)).$$

运算 f 的定义((7)式)的合理性证毕.

设 $t(\sigma)\sim t_1(\sigma)$ 且 $u(\sigma)\sim u_1(\sigma)$.这时

$$t(x)=t_1(x)\in\Gamma\text{ 且 }u(x)=u_1(x)\in\Gamma.$$

由 Γ 的极大相容性质 2°,4°及恒真式

$$t(x)=t_1(x)\wedge u(x)=u_1(x)\rightarrow t(x)+u(x)=t_1(x)+u_1(x),$$

$$t(x)=t_1(x)\wedge u(x)=u_1(x)\rightarrow t(x)\cdot u(x)=t_1(x)\cdot u_1(x),$$

知

$$t(x)+u(x)=t_1(x)+u_1(x)\in\Gamma,$$

$$t(x)\cdot u(x)=t_1(x)\cdot u_1(x)\in\Gamma,$$

于是

$$t(\sigma)+u(\sigma)\sim t_1(\sigma)+u_1(\sigma),$$

$$t(\sigma)\cdot u(\sigma)\sim t_1(\sigma)\cdot u_1(\sigma).$$

+与·的定义((5)与(6))的合理性证毕.

相应于 $1=s(0),2=s(1),\cdots$,注意(7),有

$$[1]=[s(0)]=s([0]),$$
$$[2]=[s(1)]=s([1]),$$
$$\vdots$$

恒真式 $x+1=1+x\in\Gamma(x)$.按定义(4),(5)有

$$\sigma+1\sim 1+\sigma, \tag{8}$$
$$[\sigma+1]=[1+\sigma],$$
$$[\sigma]+[1]=[1]+[\sigma]. \tag{9}$$

若把[0]简单写成0,则$[n]$可写为 n.考虑运算式(5),(6),(7),便可把N同构嵌入*N,于是有N⊂*N.若再把$[\sigma]$简写成 σ(已没有必要把新旧二者区分开),则一般可把$[t(\sigma)]$写成 $t(\sigma)$.例如,(9)式便使(8)式由等价式变成了等式:

$$\sigma+1=1+\sigma.$$

这样,等价关系的定义式((4)式)现在变为

$$t(\sigma)=u(\sigma)\quad\leftrightarrow\quad t(x)=u(x)\in\Gamma(x). \tag{10}$$

现在我们有了结构

$$\langle {}^*\mathbf{N},0,\sigma,+,\cdot,f,g,\cdots\rangle.$$

三、N与*N间的保真性

*N是利用极大相容方程组 $\Gamma(x)$对全体 $\mathscr{L}'$-词分类得到的一个 $\mathscr{L}'$-结构.确定 $\mathscr{L}'$-语句在*N中的真假,有如下规则.

定理1　对任一 $\mathscr{L}'$-语句 $\varphi(\sigma)$,有

$$\varphi(\sigma)\text{ 在}^*\mathbf{N}\text{中为真}\quad\leftrightarrow\quad\varphi(x)\in\Gamma(x). \tag{*}$$

证　对 $\varphi(\sigma)$中¬,∧,∃出现的总次数 k 归纳.

$k=0$时,$\varphi(\sigma)$为原子公式——等式,可设 $\varphi(\sigma)$为 $t(\sigma)=u(\sigma)$.这时要证的(*)式即是已知的(10)式.

$k>0$时,$\varphi(\sigma)$是复合句,要分以下三种情形讨论,讨论中注意归纳假设的运用,并注意 $\Gamma(x)$的极大相容性质1°~4°的使用.

情形1,$\varphi(\sigma)$为 $\varphi_1(\sigma)\wedge\varphi_2(\sigma)$,这时有

$\varphi_1(\sigma)\wedge\varphi_2(\sigma)$在*N中为真↔$\varphi_1(\sigma)$与 $\varphi_2(\sigma)$皆在*N中为真

(∧的性质)

$$\leftrightarrow \varphi_1(x)\in\Gamma(x)\text{且 }\varphi_2(x)\in\Gamma(x)$$

(归纳假设)

$$\leftrightarrow \varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)\in\Gamma(x)$$

($\varphi(x)$的极大相容性质 2°).

情形 2,$\varphi(\sigma)$形为$\neg\psi(\sigma)$,这时有

$\neg\psi(\sigma)$在$^*\mathbf{N}$中为真$\leftrightarrow$ $\psi(\sigma)$在$^*\mathbf{N}$中为假 ($\neg$的性质)

$\leftrightarrow \psi(x)\notin\Gamma(x)$ (归纳假设)

$\leftrightarrow \neg\psi(x)\in\Gamma(x)$

($\Gamma(x)$的相容性及极大相容性质 3°).

情形 3,$\varphi(\sigma)$形为$\exists y\psi(y,\sigma)$.

($\rightarrow$)

$\exists y\psi(y,\sigma)$在$^*\mathbf{N}$中为真$\rightarrow$存在 $t(\sigma)\in{}^*\mathbf{N}$ 使 $\psi(t(\sigma),\sigma)$在$^*\mathbf{N}$为真

$\rightarrow \psi(t(x),x)\in\Gamma(x)$ (归纳假设)

$\rightarrow \exists y\psi(y,x)\in\Gamma(x)$.

上面最后一步用 $\Gamma(x)$的极大相容性质 4°及 $\Gamma(x)$中的恒真式

$\psi(t(x),x)\rightarrow\exists y\psi(y,x)$(存在量词的性质).

($\leftarrow$) 作函数 $g:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$,$g$ 由下式定义:

$$g(n)=\begin{cases}0, & \exists y\psi(y,n)\text{ 在 }\mathbf{N}\text{ 中为假},\\ m, & m\text{ 是使}\psi(y,n)\text{ 在 }\mathbf{N}\text{ 中为真的最小 }y,\end{cases}$$

按 g 的定义,对任何 $n\in\mathbf{N}$ 下式在 $\mathbf{N}$ 中为真:

$$\exists y\psi(y,n)\rightarrow\psi(g(n),n),$$

进而得到(因下式左边是恒真式):

$$(\exists y\psi(y,x)\rightarrow\psi(g(x),x))\in\Gamma(x).$$

于是有:

$\exists y\psi(y,x)\in\Gamma(x)\rightarrow \psi(g(x),x)\in\Gamma(x)$ ($\Gamma(x)$ 极大相容性质 4°)

$\rightarrow \psi(g(\sigma),\sigma)$在$^*\mathbf{N}$中为真 (归纳假设)

$\rightarrow \exists y\psi(y,\sigma)$在$^*\mathbf{N}$中为真 (存在量词性质).

至此(*)式的归纳证明完成. □

作为定理 1 的特殊情形,当 $\varphi(\sigma)$中不出现 σ 时,φ($\varphi(\sigma)$写成 φ)为 $\mathscr{L}_-$语句.这时 φ 在 $\mathbf{N}$ 中或为真($\varphi\in\Gamma(x)$时),或为假($\varphi\notin\Gamma(x)$时).于是有以下结论:

推论(转换原理) 任何 $\mathscr{L}_-$语句在$^*\mathbf{N}$中与 $\mathbf{N}$ 中同真假.

注 1 定理 1 的结论指出了下面的事实:我们利用极大相容方程组 $\Gamma(x)$

构造出 $\mathbf{N}$ 的保真扩张 $^*\mathbf{N}$，这个 $^*\mathbf{N}$ 实现了 $\Gamma(x)$，即：相容算术方程组 $\Gamma(x)$ 在 $^*\mathbf{N}$ 中有解.事实上，仔细观察定理 1，它告诉我们 $\sigma\in{}^*\mathbf{N}$ 满足 $\Gamma(x)$ 中的每个方程.（同时它也告诉我们：$\Gamma(x)$ 包含了 σ 所满足的全部方程.）$^*\mathbf{N}$ 的构造过程，实际上就是极大相容方程组的求解过程.作为 $^*\mathbf{N}$ 的一个元素，σ 的性质是可以事先用相容算术方程组 $\Gamma(x)$ 来给定的.

注 2　关于相容方程组的扩张

平时遇见的相容方程组往往并非是极大的.下面讨论如何把它扩张成极大.

设 $\Phi(x)$ 是个相容方程组（$\Phi(x)$ 中任意有限个方程联立有自然数解）.任取一 $\mathscr{L}_-$ 方程 $\varphi(x)\notin\Phi(x)$.一个简单事实是：$\Phi(x)\cup\{\varphi(x)\}$ 与 $\Phi(x)\cup\{\neg\varphi(x)\}$ 二者至少有一个是相容的，不可能二者都是矛盾的.这是因为任何 $\gamma_1(x),\cdots,\gamma_k(x)\in\Phi(x)$ 都不可能使 $\{\gamma_1(x),\cdots,\gamma_k(x),\varphi(x)\}$ 与 $\{\gamma_1(x),\cdots,\gamma_k(x),\neg\varphi(x)\}$ 二者（注意两个有限方程组合并后仍为有限方程组）同时是矛盾方程组.（事实上，如设 $n\in\mathbf{N}$ 是 $\gamma_1(x),\cdots,\gamma_k(n)$ 的一个解，则 $\varphi(n)$ 与 $\neg\varphi(n)$ 必有一真.）这说明总可把 $\varphi(x)$ 或 $\neg\varphi(x)$ 加入到 $\Phi(x)$ 中去，从而实现 $\Phi(x)$ 的一步扩张.这个过程可以重复下去，一直达到极大为止（更详细的讨论又要用到选择公理）.

现取例 1 中的相容方程组

$$\Gamma_0(x)=\{x>0,x>1,\cdots,x>n,\cdots\},$$

并把它扩张为极大相容方程组 $\Gamma(x)$.利用这个 $\Gamma(x)$ 可构造出算术模型 $^*\mathbf{N}$.按定理 1，它的元素 σ 具有性质

$$\sigma>0,\sigma>1,\cdots,\sigma>n,\cdots.$$

第六章　势

进入超穷世界,如何认识面前的这些陌生对象? Cantor 闯入这个世界,首先发现这些对象的大小可以区分.这一发现标志着集论的诞生.

集的大小,或集的元素多少,就是集的势的概念.比较势的基本工具是双射与单射.本章用双射与单射来比较各种集的势,只谈比较,暂不谈计数.关于基数的理论放在第十章.

§6.1　等　　势

人类在形成数(基数)的概念之前,早已有了比较具体集的大小的能力,早已使用"一一对应"方法去比较集的元素的多少.这种比较方法延续至今.不用计数,剧院座位与观众孰多孰少,用一人一座方式便可判断:有座空着,还是有人因无座而站着? 当然,座位与观众可用计数来比较,因为人们已经有了自然数概念.但自然数只能用于有限集.于是一一对应的方法很自然地被用于无限集大小的比较.这时人们发现了一些料想不到的希奇而有趣的现象.

现设想有一家 ω-旅店,它的全部客房形成一可数集:

$$\overset{0}{\square}\quad\overset{1}{\square}\quad\overset{2}{\square}\quad\overset{3}{\square}\cdots\overset{n}{\square}\cdots.$$

假设该店客满.店主想为新来者腾出空房,请求住在 0,1,2,…,9 号房的客人分别搬至 10,11,12,…,19 号;而这些房的原客人要调至 20,21,22,…,29 号,于是出现了连锁调动……,店主的请求是个映射 $f:\omega\to\omega$,由下式定义:

$$f(n)=n+10.$$

实现这一调动,房主便有了十间空房.(显然,房主想要腾出多少间空房都可以,只要客人愿意搬动.)我们看见了一个事实:整体与它的一部分一样多!

一一对应的方法用于无限集,与传统观念——整体大于部分(见 1.1.3 中所引《几何原本》第一卷公理 5)——产生了矛盾.按一一对应原理,正整数集 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 与平方数集 $\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$ 二者元素一样多;而直观上,后者元素比前者少得多(前 100 个正整数中,平方数只有 10 个).这种矛盾在仅涉及有限集时不会发生(见 3.6.3 命题 1 与命题 2).整体大于部分,是有限集的性质,而超穷世界的超穷对象则具有完全新的数量特征.

回忆单射与双射的概念(见 3.5.3). $f:a\to b$ 是单射(即一对一映射),指在映射 f 之下,a 中不同元素在 b 中有不同的像. f 是 a 到 b 的满射,指在映射 f 之下,b 中每个元素在 a 中都有原像. 一对一的满射叫做双射.

定义 1 (等势(equipotent)) 集 a 与集 b 等势,用 $a\approx b$ 表示,指存在 a 到 b 的双射.

二集等势有许多不同的说法:二集等数,二集对等,二集有相同大小,二集有相同基数,二集间存在一一对应,等等. 符号上也有不同的表示法: $a\approx b$, $a\sim b$, $\bar{a}=\bar{b}$, $|a|=|b|$, $\cdots$.

易见等势具有自反性、对称性及可递性:

$a\approx a$ (恒等映射是双射),

$a\approx b\to b\approx a$ (双射的逆映射也是双射),

$a\approx b\wedge b\approx c\to a\approx c$ (双射的复合还是双射).

练习 1 证明 $\mathbf{Z}\approx\mathbf{N}$.

例 1 $\omega^2(=\omega\times\omega)\approx\omega$.

直观上不难建立 ω^2 到 ω 的一一对应,这只要给下面图 6.1.1 的无穷点阵(即平面直角坐标系带边第一象限的全体整数格点)的每个点依次指定一个自然数(发一个号码),一个不漏,且指定的数(号码)不重复就可以了.

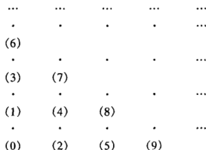


图 6.1.1

练习 2 把例1(图 6.1.1)中的一一对应用公式表示出来,并证明所给的是 ω^2 到 ω 的双射.

思考题 1 能建立 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{N}$ 的双射吗?

命题 1 $\mathscr{P}(a)\approx{}^a2$ $(2=\{0,1\})$.

证 为建立 $\mathscr{P}(a)$ 到 ${}^a2=\{f\mid f:a\to a\}$ 的双射,对每个 $b\subset a$ 取 $f_b:a\to 2$ 如下:

$$f_b(x)=\begin{cases}1, & x\in b,\\ 0, & x\notin b.\end{cases}$$

由 $F(b)=f_b$ 定义的映射 $F:\mathscr{P}(a)\to {}^a2$ 是双射.(f_b 叫做 b 的特征函数.) □

练习 3 证明:命题 1 的证明中,映射 $F(F(b)=f_b)$ 是 $\mathscr{P}(a)$ 到 ${}^a2$ 的双射.

练习 4 设 $a\approx n$. 证明 $\mathscr{P}(a)\approx 2^n$.

练习 5 建立 $(0,1)(=\{x\in\mathbf{R}|0<x<1\})$ 到 $\mathbf{R}$ 的双射.

练习 6 建立 $(0,1)$ 到 $[0,1](=\{x\in\mathbf{R}|0\leqslant x\leqslant 1\})$ 的双射.

练习 7 证明:

(1) $a\approx b\to\mathscr{P}(a)\approx\mathscr{P}(b)$.

(2) $a\approx b\wedge(c\cap(a\cup b)=\varnothing)\to a\cup c\approx b\cup c$.

(3) $a\cap b=\varnothing\wedge c\cap d=\varnothing\wedge a\approx c\wedge b\approx d\to a\cup b\approx c\cup d$.

(4) $a\approx b\wedge c\approx d\to a\times c\approx b\times d$.

练习 8 设 $a\subset\omega$ 且 a 是无限集. 证明 $a\approx\omega$.

思考题 2 设 $a\supset b\supset c$,且 $f:a\to c$ 为双射. 试用 f 构造出 a 到 b 的双射.(先思考一个简单的问题:如果前面介绍的 ω 旅店在客满后只来了 5 位新客人,为了减少调动,站主如何对他为了腾出 10 间空房而发出的请求($f:\omega\to\omega$)作出调整?)

§6.2 不同大小的实无限

为判断二集是否等势,按定义要寻找它们之间可能存在的双射,而这常非易事. 往往比较容易地是找出一集到另一集的单射. 若 a 到 b 存在单射,则直观上意味着 a 的元素不会比 b 的元素多. 本节主要讨论用单射来比较集的势.

用符号 $a\leqslant b$ 表示存在 a 到 b 的单射.

由定义立即得出以下简单事实:

1° $a\leqslant a$.(自反性)

2° $a\subset b\to a\leqslant b$.

3° $a\leqslant b\wedge b\leqslant c\to a\leqslant c$.(可递性:单射的复合仍是单射.)

4° $a\leqslant b\wedge a\approx c\to c\leqslant b$.

5° $a\leqslant b\wedge b\approx c\to a\leqslant c$.

6° $a\leqslant b\to\exists c\subset b(a\approx c)$.

练习 1 证明:

(1) $a \leqslant \mathscr{P}(a)$.　　　　(2) $b \neq \varnothing$时, $a \leqslant a \times b$.

(3) $b \neq \varnothing$时, $a \leqslant {}^b a$.　　　　(4) 若 a 至少有两个元素, 则 $b \leqslant {}^b a$.

(5) $b \subset c \to {}^b a \leqslant {}^c a$.

练习 2　证明: 当 $a, b \neq \varnothing$时, $b \leqslant a \to$ 存在 a 到 b 的满射.

思考题 1　尝试证明: 存在 a 到 b 的满射 $\to b \leqslant a$.

***思考题 2**　判断下面的命题是否成立: 任意集 a 与 b 皆可比较: $a \leqslant b \vee b \leqslant a$.

ω 即 **N** 是我们见到的第一个实无限. 与 **N** 等势的集叫做可数集. 整数集是个可数集: $\mathbf{Z} \approx \mathbf{N}$(§6.1 习题 1). 下面将证明有理数集是可数集: $\mathbf{Q} \approx \mathbf{N}$(见§6.3 例 2). 利用可数集性质还可证明代数数全体构成可数集(见§6.4). 是否存在不可数无限集? Cantor 于 1873 年对这个问题作出了肯定的回答.

练习 1(1)指出 $\mathbf{N} \leqslant \mathscr{P}(\mathbf{N})$, 但尚不知 $\mathscr{P}(\mathbf{N})$是否严格比 **N** 大.

我们用 $a \prec b$ 表示 $a \leqslant b$ 但 $a \not\approx b$, 直观意思是: a 的元素比 b 的少.

定理 1(Cantor 定理)　$a \prec \mathscr{P}(a)$.

证　只用证任何 $f: a \to \mathscr{P}(a)$都不会是满射. 反设 f 是 a 到 $\mathscr{P}(a)$的满射. 任取 $x \in a$, 有 $f(x) \subset a$. 作 a 的子集

$$b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}. \ (b \in \mathscr{P}(a).)$$

因 f 是满射, 故 b 定有原像. 设 b 在 a 中的一个原像是 x_0, 即 $f(x_0) = b$. 由此便得出矛盾:

$$x_0 \in f(x_0) \text{即} \ x_0 \in b \to x_0 \notin f(x_0),$$

$$x_0 \notin f(x_0) \to x_0 \in b \ \text{即} \ x_0 \in f(x_0). \qquad \square$$

在定理 1 中令 $a = \mathbf{N}$, 便知有许多大小不同的实无限:

$$\mathbf{N} \prec \mathscr{P}(\mathbf{N}) \prec \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{N})) \prec \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{N}))) \prec \cdots.$$

Cantor 定理的重要性在于, 它让我们看到超穷世界是个层次万千的世界, 其中无限集可按大小分类.

§6.3　Cantor-Bernstein 定理

关于集的势的比较, 有下面的引理 1. 请把引理 1 的证明与 ω 旅店的调动(参见§6.1)对照, 会帮助理解. 注意引理中的无限集 a, b, c 不一定是可数集.

引理 1　$a \supset b \supset c \wedge a \approx c \to a \approx b \approx c$.

证　要用 a 到 c 的双射 f 构造 a 到 b 的双射 g. 这需要利用已知的 f 对

$a-b$的元素进行调动，并同时进行相应的连锁调动.令

$$a_0=a-b, a_1=f[a_0], a_2=f[a_1], \cdots, a_{n+1}=f[a_n], \cdots$$

记$\bigcup_{n\in\omega}a_n=\bigcup\{a_n \mid n\in\omega\}=a_0\cup a_1\cup\cdots\cup a_n\cup\cdots$. g 由下式定义：

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\bigcup_{n\in\omega}a_n, \\ x, & x\in a-\bigcup_{n\in\omega}a_n. \end{cases}$$

为证 g 是 a 到 b 的单射(注意 f 是单射)，只用考虑 $x_1\in a-\bigcup_{n\in\omega}a_n$ 而 $x_2\in a_k$ 时是否有 $g(x_1)\neq g(x_2)$. 事实上，此时有

$$g(x_2)=f(x_2)\in a_{k+1}\text{而 } g(x_1)=x_1\notin\bigcup_{n\in\omega}a_n.$$

g 是 a 到 b 的满射. 事实上，b 中任意 y 在 g 之下都有原像：

若 $y\in a-\bigcup_{n\in\omega}a_n$，则 $g(y)=y$，y 以自己为原像；

若 $y\in a_n$(当然 $n\neq 0$，否则 $y\notin b$)，则有 $x\in a_{n-1}$使 $g(x)=f(x)=y$. □

有了引理 1，§6.1 练习 6 中开区间(0,1)与闭区间[0,1]的等势问题变得简单：因

$$(0,1)\subset[0,1]\subset R,$$

故$(0,1)\approx[0,1]\approx R$(利用§6.1 练习 5).

回到集间关系$\preccurlyeq$. 已经知道它具有自反性与可递性. 一个更深刻的结果是：$\preccurlyeq$具有反对称性. 这就是下面著名的 Cantor-Bernstein 定理——一个使用方便的等势判别法. 它的证明用到引理 1. 事实上，它是引理 1 的推广与变形.

定理 1(Cantor-Bernstein 定理)

$$a\preccurlyeq b \land b\preccurlyeq a\rightarrow a\approx b.$$

证 设有单射 $f: a\rightarrow b$ 及单射 $g: b\rightarrow a$. 我们有

$$a\approx f[a], b\approx g[b], f[a]\approx g[f[a]]; \tag{1}$$

$$a\supset g[b]\supset g[f[a]]. \tag{2}$$

由(1)与(2)利用引理 1 便得 $a\approx g[b]\approx b$. □

用寻找两个单射代替寻找一个双射，事情往往容易得多.

例 1 回到§6.1 例 1. 现在不用建立双射便知 $\omega^2\approx\omega$，因为：

第一，$\omega\preccurlyeq\omega^2$. $n\in\omega$ 对应于$(0,n)$便给出了一个单射.

第二，$\omega^2\preccurlyeq\omega$. $(m,n)\in\omega^2$ 对应于 2^m3^n 便给出了另一个单射.

例 2 再看§6.1 思考题 1：存在 **Q** 到 **N** 的双射吗？存在！因为：

第一，$\mathbf{N}\preccurlyeq\mathbf{Q}$(因 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$)；

第二，$\mathbf{Q}\preccurlyeq\mathbf{N}$，下面定义的 f 是 **Q** 到 **N** 的单射：

$$f\left((-1)^k\frac{n}{m}\right)=2^n3^m5^k.$$

这就证明了有理数与自然数"一样多",或者说 $\mathbf{Q}$ 是个可数集.

因 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$,故 $\mathbf{Z}\approx\mathbf{Q}\approx\mathbf{N}$.

命题 1 $\mathbf{R}\approx\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

证 由 § 6.1 命题 1 知 $\mathscr{P}(\mathbf{N})\approx{}^{\mathbf{N}}2$. 现证 $\mathbf{R}\approx{}^{\mathbf{N}}2$.

先证 ${}^{\mathbf{N}}2\preccurlyeq\mathbf{R}$. 任取 $f\in{}^{\mathbf{N}}2$. 记 $x_n=f(n)\in\{0,1\}$. 让小数

$$0.x_0x_1x_2\cdots x_n\cdots(\text{十进小数})$$

作为 f 在 $\mathbf{R}$ 中的像,便得到 ${}^{\mathbf{N}}2$ 到 $\mathbf{R}$ 的单射.

再证 $\mathbf{R}\preccurlyeq{}^{\mathbf{N}}2$. 因 $\mathbf{R}\approx(0,1)$(见 § 6.1 练习 5,$(0,1)$是区间),只用证$(0,1)\preccurlyeq{}^{\mathbf{N}}2$. 任取二进小数

$$x=0.x_0x_1x_2\cdots x_n\cdots\quad(0<x<1,x_n\in\{0,1\}).$$

令 $f(n)=x_n$,则 $f\in{}^{\mathbf{N}}2$. 以 f 为 x 的像,便得$(0,1)$到 ${}^{\mathbf{N}}2$ 的单射. □

命题 1 证明第二部分中有一点要说明:所取二进小数 x 的表示可能不惟一,例如

$$x=0.10000\cdots=0.01111\cdots.$$

需要约定:统一用后者作为 x.

由命题 1 结合 § 6.1 命题 1 及 Cantor 定理便得出结论:

$$\mathbf{N}\prec\mathbf{R}.$$

命题 2 $\mathbf{R}^2(=\mathbf{R}\times\mathbf{R})\approx\mathbf{R}$.

证 首先,让每个 $x\in\mathbf{R}$ 与$(0,x)\in\mathbf{R}^2$ 对应,得到 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的单射.

下证 $\mathbf{R}^2\preccurlyeq\mathbf{R}$. 因 $\mathbf{R}\approx(0,1)$(单位开区间),故只用证:

不带边的单位正方形$(0,1)^2(=(0,1)\times(0,1))\preccurlyeq(0,1)$.

设 $x,y\in(0,1)$,它们的十进小数表示是

$$x=0.x_0x_1\cdots x_n\cdots,$$

$$y=0.y_0y_1\cdots y_n\cdots.$$

约定:若小数某位不为 0 的数字右边全为 0,则把该位非 0 字数减小 1,并把其右边所有的 0 全改为 9. 如 $0.2000\cdots$要改为 $0.1999\cdots$. 作一小数 $z\in(0,1)$:

$$z=0.x_0y_0x_1y_1\cdots x_ny_n\cdots.$$

让(x,y)与 z 对应,便得$(0,1)^2$ 到$(0,1)$的单射. □

推论 1 复数集 $\mathbf{C}\approx\mathbf{R}$.

推论 2 $n\geqslant1$ 时 $\mathbf{R}^n\approx\mathbf{R}$. (对 n 归纳.)

命题 2 的意思是:平面(乃至 n 维空间)与直线的点一样多. Cantor 得到这一成果后,1877 年在给 Dedkind 的信中说:"我见到了,但我不相信."[77]

Cantor 的这一研究成果促进了维度与一一对应之间关系的研究,后来,J.

Lüroth 证明了:$\mathbf{R}$(一维连续统)与 $\mathbf{R}^2$(二维连续统)之间不存在连续的一一对应.

对集的势的研究属于实无限的学问.这种学问似乎与人们的实际生活没有什么直接关系.情况并非如此.例如,国家举债,其中有关于无限的学问;金融活动中的行骗,也常属行骗者利用了无限集"整体可与部分一样多"的道理,尽管行骗者个人的寿命有限.

练习 1 证明:

(1) $(a \prec b \wedge b \preccurlyeq c) \rightarrow a \prec c$.

(2) $(a \preccurlyeq b \wedge b \prec c) \rightarrow a \prec c$.

练习 2 证明 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N} \approx {}^{\mathbf{N}}2$.

§6.4 关于可数集的结论

按 3.6.1 定义 4,可数集是与自然数集等势的集(注意这里不把有限集当作可数集),即:

a 是可数集 $\leftrightarrow a \approx \mathbf{N}$

$\leftrightarrow a$ 的全体元素形成不重复无限序列:$x_0, x_1, \cdots, x_n \cdots$.

下面讨论可数集的性质,这些性质是关于实无限的初等知识.

性质 1 可数集的无限子集也是可数集.

证 设无限集 $b \subset a$,且 $a \approx \mathbf{N}$,即 a 形成不重复无限序列:

$$x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$$

作为 a 的无限子集,b 是 a 的子数列:

$$x_{n_0}, x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

这也是一个不重复的无限序列,故 $b \approx \mathbf{N}$. □

注 1 上面证明中子数列元素的下标可递归表示为:

$$n_0 = \min\{n \in \mathbf{N} \mid x_n \in b\},$$

$$n_k = \min\{n \in \mathbf{N} \mid x_n \in (b - \{x_{n_0}, \cdots, x_{n_{k-1}}\})\}.$$

注 2 性质 1 是 §6.1 练习 8 的推广.

性质 2 若存在无限集 b 到可数集 a 的单射,则 b 是可数集.

证 设无限集 $b \preccurlyeq a \approx \mathbf{N}$.则有双射 $f: b \rightarrow f[b](\subset a)$.因 $f[b]$ 是无限集,利用性质 1 得 $f[b] \approx \mathbf{N}$.由此得 $b \approx \mathbf{N}$. □

性质 3 若 a 可数且 b 非空有限或可数,则 $a \times b$ 与 $b \times a$ 皆可数.

证 设 $a = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$,$b = \{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ 或 $b = \{y_0, \cdots,$

$y_n\}$. 让(x_i, y_j)对应于2^i3^j,则有 $a\times b$ 到 $\mathbf{N}$ 的单射. 因 $b\neq\varnothing$,故 $a\times b$ 是无限集. 利用性质 2 便得 $a\times b\approx\mathbf{N}$. □

性质 4　若 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有一个可数,而其他为非空有限或可数,则 $a_1\times\cdots\times a_n$ 可数.(对 n 归纳并利用性质 3.)

性质 5　若 a 可数,且 b 有限或可数,则 $a\cup b$ 也可数.

证　设 a 为 $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots,b$ 为 $y_0,\cdots,y_n$,或为 $y_0,y_1,\cdots,y_n,\cdots$.

情形 1,$a\cap b=\varnothing$. 这时 $a\cup b$ 全部元素形成不重复无限序列:

$$x_0,y_0,x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n,x_{n+1},\cdots$$

情形 2,$a\cap b\neq\varnothing$. 令 $c=b-a$. 这时 $c(\subset b)$为有限或可数,$a\cap c=\varnothing$且 $a\cup b=a\cup c$. 由情形 1 的讨论知 $a\cup c$ 为可数,故 $a\cup b$ 可数. □

性质 6　若 $a_1,\cdots,a_n$ 中至少有一个可数,而其他为有限或可数,则$\bigcup_{i=1}^{n}a_i=a_1\cup\cdots\cup a_n$ 可数.(对 n 归纳并用性质 5.)

性质 7　若每个 a_i 可数或有限且 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i$ 是无限集,则 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i$ 可数.

证　设 a_i 为 $x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{in},\cdots$,或为 $x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{in_i}$.

情形 1,不同的 a_i 之间没有公共元素,即当 $i\neq j$ 时 $a_i\cap a_j=\varnothing$. 这时令

$$f(x_{ij})=2^i3^j,$$

这样定义的 $f:\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i\to\mathbf{N}$ 是单射. 由性质知 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i$ 可数.

情形 2,有些不同的 a_i 存在公共元素. 这时作一列新集:

$$b_0=a_0,b_1=a_1-b_0,\cdots,b_n=a_n-(b_0\cup\cdots\cup b_{n-1}),\cdots.$$

这样当 $i\neq j$ 时 $b_i\cap b_j=\varnothing$,且 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i=\bigcup_{i=0}^{\infty}b_i$. 由情形 1 的讨论知 $\bigcup_{i=0}^{\infty}b_i$(从而 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a_i$)是可数集. □

性质 8　若 a 可数,则 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a^n$ 也可数(规定 $a^0=\{\varnothing\}=1$).

证　由性质 3 知,每个 $a^n(n>0)$可数,再用性质 7 即可. □

性质 9　若 a 可数,则所有由 a 的元素构成的有限序列形成的集 b 也可数.

证　对任一由 a 的元素构成的有限序列 $x_{i_0},\cdots,x_{i_{n-1}}$,令

$$f(x_{i_0},\cdots,x_{i_{n-1}})=(x_{i_0},\cdots,x_{i_{n-1}})\in a^n.$$

这样定义的映射 f 是 b 到 $\bigcup_{i=0}^{\infty}a^n$ 的单射. b 是无限集,由性质 2 及性质 8 知 b 可数. □

我们用单射与双射为工具讨论了势的比较.但究竟什么是集的势？至此只能说,势这个抽象的概念表征了相互等势的集所具有的共同属性;直观上它表示集的元素的多少.Cantor曾形象地把集的势(基数)说成是集这个具体对象"在我们心中的一幅抽象画"[78].在第十章中,我们将把势这个概念在ZFC内具体化.

通常用$\aleph_0$来表示可数集的势.($\aleph_0$读作"阿列夫零".$\aleph$是希伯来字母表的头一个字母.)

限于直观地理解,性质5,6,7,3,4依次含有以下意思:

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,$$
$$\aleph_0+\cdots+\aleph_0=\aleph_0,$$
$$\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0+\cdots=\aleph_0,$$
$$\aleph_0^2=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0,$$
$$\aleph_0^n=\aleph_0.$$

练习1 指出以下无限集中哪些是可数集,并简要说明理由.(题中**N**或ω是自然数集,**Z**是整数集,**Q**是有理数集,**R**是实数集,**C**是复数集.)

(1) $\mathbf{Z}^n\quad(n\in\omega)$.

(2) $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.

(3) $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

(4) $\{x\in\mathbf{R}\mid\exists n\in\mathbf{N}-\{0\}\ x=\ln n\}$.

(5) $\{x\in\mathbf{N}\mid\exists y\in\mathbf{R}x=\tan y\}$.

(6) $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<10^{-10}\}$.

(7) $\{x\in\mathscr{P}(\mathbf{N})\mid x$ 的元素都是偶数$\}$.

(8) $\{x\in\mathscr{P}(\mathbf{N})\mid x$ 是有限集$\}$.

(9) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x=y=z\}$.

(10) $\bigcup_{n\in\omega-\{0\}}a_n$,其中$a_n=\{x\in\mathbf{R}\mid x^n\in\mathbf{Q}\}$.

(11) $\bigcup_{n\in\omega}a_n$,其中a_n同上题.

(12) $\bigcup_{k\in\omega}\mathscr{P}(\mathbf{N}_k)$,其中$\mathbf{N}_k=\{0,1,\cdots,k\}$.

(13) 坐标平面上平行于y轴的全体直线的集.

(14) 坐标平面上所有圆心坐标为有理数,且半径长也为有理数的圆的集.

(15) 全体二次有理系数多项式组成的集.

(16) $\mathbf{C}-\mathbf{R}$.

(17) $\{x\in\mathbf{C}\mid a_0x^2+a_1x+a_2=0,a_0,a_1,a_2\in\mathbf{Q},a_0\neq0\}$.

(18) 所有有理系数多项式组成的集.

(19) $\{x\in\mathbf{C}\mid x$ 是某个有理系数多项式的零点$\}$.

(20) 实数轴上所有以有理数为端点的开区间组成的集.

(21) 所有自然数列构成的集.

(22) 所有从某项后为常数的有理数列构成的集.

(23) 对有理数施行 $+,-,\times,\div,\sqrt{\ },\sqrt[3]{\ },\cdots$ 中有限次运算所得到的数的全体构成的集.

(24) 实数直线上无限个互不相交开区间构成的集.

(25) 平面上无限个互不相交圆盘构成的集.

(26) 三维空间中无限个互不相交长方体构成的集.

(27) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数的无限多个孤立极值点(如果有)构成的集.

(28) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数(增或减)的无限多个间断点(如果有)构成的集.

注 1　可数集性质 7 涉及无限多个可数集,它的证明不可避免地涉及选择公理.详见 §6.5 中的讨论.

注 2　本节在建立可数集的性质的过程中,我们把有限集与可数集严格分开.如果为了方便把有限集也并为可数集,那么可数集性质的表述要作调整.

思考题 1　把有限集也视为可数集,文中可数集九条性质如何调整?

6.4 附　可数集性质的另一常用表述

一般为了方便,把有限集与可数集合起来统称可数集(有时也称至多可数集),而把与自然数集等势的可数集叫做可数无限集,即规定:

$$a \text{ 为可数集} \quad \leftrightarrow \quad a\approx\omega \text{ 或 } a\approx n\in\omega,$$

$$a \text{ 为可数无限集} \quad \leftrightarrow \quad a\approx\omega,$$

那么 §6.4 中关于可数集的九条性质都需作调整.原来的每条性质各相应有两个新结论,现列出如下.

性质 1　可数集的子集是可数集.

可数无限集的无限子集是可数无限集.

性质 2　到可数集存在单射的集是可数集.

若存在无限集到可数集的单射,则该无限集是可数无限集.

性质 3　二可数集的 Cartesian 积集是可数集.

可数无限集与非空可数集的 Cartesian 积集是可数无限集.

性质 4 有限个可数集的 Cartesian 积集是可数集.

若有限个非空可数集中至少有一个是无限集,则它们的 Cartesian 积集是可数无限集.

性质 5 二可数集之并是可数集.

可数集与可数无限集之并是可数无限集.

性质 6 有限个可数集之并是可数集.

若有限个可数集中至少有一个是无限集,则它们的并是可数无限集.

性质 7 可数个可数集之并是可数集.

若可数个可数集之并为无限集,则为可数无限集.

性质 8 若 a 是可数集,则 $\bigcup_{n\in\omega}a^n$ 是可数集.

若 a 是可数无限集,则 $\bigcup_{n\in\omega}a^n$ 是可数无限集.

性质 9 若 a 是可数集,则 a 的元素的有限序列的全体是可数集.

若 a 是可数无限集,则 a 的元素的有限序列的全体是可数无限集.

§6.5 势的性质与选择公理

每当需要同时从无限多个非空集中各选出一个元素来定义某种数学对象,就可能要用到选择公理.数学(不仅是在集论)中,选择公理像幽灵一样时隐时现,人们甚至不知不觉地使用它(微积分中就有这样的例子).后面第九章将详细讨论选择公理及其在数学上的应用例.本书前几章中该公理已不止一次出现过,例如 3.5.3 附的单值化原则,4.1.3 中的选代表原则,4.4.1 中的滤子扩张原则,5.4 附的关于相容方程组的扩张等;每次该公理出现时,我们都作了一些解释.

本章关于势的研究中已有三次涉及这一公理.一次,选择公理出现在可数集性质 7 的证明中.可数集性质 7 的简单形式是:

若每个 a_i 是可数集,则 $\bigcup_{i\in\omega}a_i$ 是可数集.

证明中需将每个 a_i 各自写成不重复序列

$$x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{in}, \cdots.$$

问题在于这种写法是不惟一的,每个可数集 a_i 可以表示成许多个序列,要从中选出一个写出来,而且要同时对每个 a_i 来做这件事.当每个 a_i 同时都有了固定的表示之后,往下才可以定义所需要的单射;而同时给出每个 a_i 的一种

序列表示，就已经用了选择公理．这就是说，选择公理保证了性质 7 成立．

遇到可数集，常需要写出该集的一个序列表示．对于只涉及有限个可数集的情形，给每个可数集任选一个序列表示，这样做没有什么问题．若同时碰上无限多个可数集而要这么做，合理性则可用选择公理来保证．

另一次，选择公理出现在下面的问题中：

存在 a 到 b 的满射与存在 b 到 a 的单射，二者是否是一回事？

从 §6.2 练习 2 已经知道：

$$b \leqslant a \rightarrow \text{存在 } a \text{ 到 } b \text{ 的满射} \quad (b \neq \varnothing).$$

反过来，存在 a 到 b 的满射是否意味着 $b \leqslant a$ 成立（§6.2 思考题 1）？

假设 $f: a \rightarrow b$ 是满射．下面尝试用 f 来定义 b 到 a 的单射 g．

设 $x \in b$．因 f 是 a 到 b 的满射，故 x 在 a 中的原像的集非空：

$$f^{-1}[\{x\}] \neq \varnothing.$$

任取 $y \in f^{-1}[\{x\}]$，令

$$g(x) = y.$$

$x_1 \neq x_2$ 时，$g(x_1) \neq g(x_2)$（因 $f^{-1}[\{x_1\}] \cap f^{-1}[\{x_2\}] = \varnothing$）．于是 g 为所求的单射．

上面在我们从 $f^{-1}[\{x\}]$ 中任取 y 作为 $g(x)$ 的定义时，使用了选择公理：所求的从 b 到 a 的单射 g 就是 $\{f^{-1}[\{x\}] \mid x \in b\}$ 的选择函数．

选择公理用势语言写出的一种等价形式（§6.2 思考题 2）：

任意二集 a 与 b 皆可比较：$a \leqslant b \vee b \leqslant a$．

关于这种等价形式的讨论见 §9.2 定理 3 与 §9.2 练习 1．

§6.6　连续统假设

在 §6.3 中我们已经知道自然数集 $\mathbf{N}$ 与实数集 $\mathbf{R}$ 有不同的势：

$$\mathbf{N} \prec \mathscr{P}(\mathbf{N}) \approx {}^{\mathbf{N}}2 \approx \mathbf{R}.$$

下面直接证明 $\mathbf{N}$ 与单位区间 $(0,1)$（$\approx \mathbf{R}$）之间不存在双射，并通过这一证明欣赏一次"Cantor 对角线论证"．

反设区间 $(0,1)$ 是可数集．用标准无限小数来惟一表示这些实数中的每一个（如 §6.3 命题 2 证明中所约定的），一个不漏地列出如下：

$$0.x_{00}x_{01}x_{02}\cdots x_{0n}\cdots,$$
$$0.x_{10}x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$
$$0.x_{20}x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$
$$0.x_{n0}x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots.$$

注意上面对角线上的数字：

$$x_{00}, x_{11}, x_{22}, \cdots, x_{nn}, \cdots,$$

然后作一小数

$$a = 0.\, y_0 y_1 y_2 \cdots y_n \cdots,$$

使每个 y_n 满足：

$$y_n \neq 0, y_n \neq 9, y_n \neq x_{nn},$$

那么 $a \in (0,1)$，且 a 与上面所列出的每个小数都不同，从而与“一个不漏”相矛盾.

19 世纪 70 年代，Cantor 在证明了 **R** 的势大于 **N** 的势之后，研究了大量的各种不同的实数子集；研究之后发现，按势大小，他只见到了两类子集：一类如 **N**，**Z**，**Q**，代数数集，等等，这些都是可数集；另一类如无理数集，超越数集，Cantor 完全集，等等，这些都是不可数集，且都与 **R** 等势. 长期大量的研究结果使他相信他的下面的猜想是正确的：

连续统假设（Continuum Hypothesis，简记为 CH） *实数集 **R** 的任何不可数子集都与 **R** 等势.*

由于实数与直线上的点一一对应，通常把 **R** 叫做（一维）连续统. 如果上述连续统假设成立，那就意味着在可数集与连续统之间没有势的中间地带，即不存在一种势，它比可数势大，而比连续统的势小.

Cantor 为了证实他的这个猜想，付出了艰辛的劳动，献出了毕生精力，但未成功.

在 1900 年巴黎国际数学家大会上，Hilbert 在他著名的演讲中把连续统假设列为 23 个未解决问题的第一个[79]：

Cantor 的连续统基数问题

……Cantor 关于这种集合的研究，提出了一个似乎很合理的定理，可是，尽管经过坚持不懈的努力，还没有人能成功地证明这条定理. 这定理是这样的：

每个由无穷多实数组成的系统，即每个（无穷）数集（或点集），或者等价于自然数的集合 1，2，3，…或者等价于全体实数的集合，从而等价于连续统，即一条直线上点的全体；因此，就等价关系而言，只有两种（无穷）数集，可数集和连续统.

由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数基数之后；所以，这定理的证明，将在可数集与连续统之间架起一座新的桥梁.

与数学上的 Riemann 猜想和 Goldbach 猜想一样，连续统假设吸引人们对它及相关问题进行了大量的研究，这种研究在 20 世纪里成了集论发展的一条

主线.

关于连续统假设研究的重大突破是 Gödel 于 1938 年及 P. Cohen 于 1963 年分别取得的. Gödel 证明了:基于我们的集论公理(ZFC),连续统假设不能被否证,或者说,连续统假设与 ZFC 公理系统是无矛盾的. 20 多年后,Cohen 证明了:仅基于 ZFC,连续统假设是不可证的. 这就让我们知道,连续统假设是独立于 ZFC 的,是 ZFC 不可判定的. 在这个意义下可以说,就目前数学主体的基础,连续统假设问题是不可解的.

Gödel 与 Cohen 的研究成果皆属 20 世纪最杰出的数学成就. 他们的理论与方法和他们得出的结论一样,对集论的发展产生了极大的影响.

第七章　良序结构与超限归纳法

序结构是数学的基本结构之一.历史上,人们先学会比较,后学会计数.没有秩序,无法数数,序是计数的基础.

在数系构造中,我们曾见过具体数集上具体的序.本章要建立一般集上一般的序,它们是:偏序、全序与良序.有了良序,归纳法便进入超穷世界.

§7.1　偏　　序

偏序关系是数学乃至日常生活中十分常见的一种序关系的抽象.

定义 1(偏序关系(partial order relation))　集 a 上的二元关系($r\subset a^2$),如果具有以下性质 1°与 2°就叫做 a 上的偏序关系:

1°　(反自反性) $\forall x\in a((x,x)\notin r)$,

2°　(可递性) $\forall x,y,z\in a((x,y)\in r\wedge(y,z)\in r\rightarrow(x,z)\in r)$.

偏序关系简称为偏序.带有偏序 r 的集叫做 r_偏序集.偏序集 a 连同其上的偏序 r 形成偏序结构$\langle a,r\rangle$.($(x,y)\in r$ 常写成 xry.)

例 1　设有三元集 $a=\{x,y,z\}$.下面是三个 a 上的二元关系,其中 r_1 与 r_3 是 a 上偏序,而 r_2 不是 a 上偏序:

$$r_1=\{(x,y),(x,z)\},$$
$$r_2=\{(x,y),(y,z)\},$$
$$r_3=\{(x,y),(y,z),(x,z)\}.$$

练习 1　$a=\{x,y\}$上有多少个二元关系?其中有多少个偏序?把它们写出来.

练习 2　$a=\{x,y,z\}$上有多少个二元关系?其中有多少个偏序?

若$\langle a,r\rangle$是偏序结构且 $b\subset a$,则易知子结构$\langle b,r\cap(b\times b)\rangle$也是偏序结构,常简写为$\langle b,r\rangle$.

设 r 是a 上偏序,且 $x,y\in a$.易知以下三种情形皆与偏序的反自反性相矛盾:

$$xry\wedge x=y\rightarrow yry,\qquad\text{(由等词性质)}$$
$$x=y\wedge yrx\rightarrow yry,\qquad\text{(由等词性质)}$$
$$xry\wedge yrx\rightarrow xrx.\qquad\text{(由可递性)}$$

于是以下三种情形

$$xry,\quad x = y,\quad yrx$$

至多出现一种;但有可能三者皆不成立,也就是说三分律对偏序并不一定成立.拿例1的偏序 r_1 来说,yr_1z,zr_1y,$y=z$ 三者皆不成立.

有时把 a 上偏序 r 写成$<$,即把 xry 写成$x<y$,于是偏序结构$\langle a,<\rangle$满足的条件可写成:

1° $\forall x\in a, x\not< x$. (反自反性)

2° $\forall x,y,z\in a((x<y\wedge y<z)\rightarrow x<z)$. (可递性)

此时若用 $x\leqslant y$ 表示$x<y\vee x=y$,则 a 上二元关系"$\leqslant$"满足:

(i) $\forall x\in a\ x\leqslant x$. (自反性)

(ii) $\forall x,y\in a((x\leqslant y\wedge y\leqslant x)\rightarrow x=y)$. (反对称性)

(iii) $\forall x,y,z\in a((x\leqslant y\wedge y\leqslant z)\rightarrow x\leqslant z)$. (可递性)

通常也用"$\leqslant$"来定义偏序,即把满足(i),(ii),(iii)的$\langle a,\leqslant\rangle$叫做偏序结构,这时 $x<y$ 表示$x\leqslant y\wedge x\neq y$,且"$<$"满足条件 1°与 2°.若要区分,则把满足条件 1°与 2°的偏序 $r(<)$叫做严格偏序.

例 2 $\langle\mathscr{P}(a),\subset\rangle$是偏序结构,二元关系$\subset$(作为一种$\leqslant$)满足条件(i),(ii),(iii).

例 3 在 $N-\{0\}$上定义二元关系 r:

$$mrn\leftrightarrow m\text{ 能整除 }n,$$

则 r 是 $\mathbf{N}-\{0\}$上的偏序,满足条件(i),(ii),(iii).

思考题 1 能否建立集 a 上的偏序"$\leqslant$"使得这个偏序同时是 a 上的等价关系?能否建立集 a 上的严格偏序"$<$"使它同时是 a 上的等价关系?

下面思考题2的结论是关于偏序集的一个表示定理.

思考题 2 证明对每个偏序集 a 都能找到一个集族A 使 $\langle a,\leqslant\rangle\cong\langle A,\subset\rangle$.(同构概念见§5.2.)

练习 3 设 $r\subset a^2$ 是 a 上偏序.证明 r^{-1}也是 a 上偏序.

练习 4 设 a 与 b 都是偏序集,且 $f:a\rightarrow b$ 满足条件

$$\forall x,y\in a(x\leqslant y\leftrightarrow f(x)\leqslant f(y)).$$

证明 f 是单射.如果把上面的条件改成

$$\forall x,y\in a(x<y\leftrightarrow f(x)<f(y)),$$

那么结论不一定成立,试举例说明.

设 a 是偏序集,$x\in a$.注意下面几个名词:

(1) 若$\forall y\in a, y\not< x$,则称 x 是 a 的极小元.

(2) 若$\forall y\in a, x\leqslant y$,则称 x 是a 的最小元.

(3) 若 $\forall y\in a, x\not< y$，则称 x 是 a 的极大元.

(4) 若 $\forall y\in a, y\leqslant x$，则称 x 是 a 是最大元.

例 4 偏序结构 $\langle\mathscr{P}(\{x,y\}),\subset\rangle$ 的最小元是 $\varnothing$，最大元是 $\{x,y\}$.

偏序结构 $\langle\{\{x\},\{y\},\{x,y\}\},\subset\rangle$ 没有最小元，但有两个极小元：$\{x\}$ 与 $\{y\}$.

偏序结构 $\langle\{\varnothing,\{x\},\{y\}\},\subset\rangle$ 没有最大元，但有两个极大元：$\{x\}$ 与 $\{y\}$.

最小元一定也是极小元，但反之不真. 同样，最大元必是极大元，但反之不真. 最大元与最小元若有，都是惟一的；极大、极小元可能不惟一.

思考题 3 *能否构造一个偏序集，它没有最大元，但却有且只有一个极大元？*

设 a 是偏序集. $x(\in a)$ 是 $b(\subset a)$ 的下界，指 x 与 b 满足：

$$\forall y\in b\ (x\leqslant y).\text{（上界的概念类似地定义.）}$$

在给定的偏序集中，有些元素间可能没有直接序联系（即不能按该偏序来比大小），但它们（的集）却可能有下界，即它们可能有公共的向下延伸. 这是它们之间可能有的一种间接序联系.

例 5 偏序结构 $\langle\mathscr{P}(\{x,y,z\})-\{\varnothing\},\subset\rangle$ 中，$\{x,y\}$ 与 $\{x,z\}$ 不能用序 $\subset$ 相联系，但它们有下界 $\{x\}$. 换句话说，$\{x\}$ 是 $\{x,y\}$ 与 $\{x,z\}$ 的公共向下延伸.

定义 2（相容（compatible）） 设 a 是偏序集，$x,y\in a$. 若 $\{x,y\}$ 在 a 中有下界，即

$$\exists z\in a\ (z\leqslant x\wedge z\leqslant y)\text{（即 } x,y \text{ 在 } a \text{ 中有公共向下延伸），}$$

则称 x 与 y 在 a 中相容，否则称 x 与 y 在 a 中不相容.

按定义，当 $x\leqslant y$ 时，x 与 y 当然是相容的. 又如例 5 中的 $\{x,y\}$ 与 $\{x,z\}$ 是相容的. 但 $\{x,y\}$ 与 $\{z\}$ 不相容，它们没有公共的向下延伸.

定义 3（反链（antichain）） 设 a 是偏序集，$b\subset a$. 若 b 中任意二元素都不相容，则 b 叫做 a 中的反链.

练习 5 *写出例 5 的偏序结构 $\langle\mathscr{P}(\{x,y,z\})-\{\varnothing\},\subset\rangle$ 中的所有极大反链（极大反链，指该结构中没有更大的反链包含它）. 与反链相对立的概念是链——偏序集的全序子集.*

§7.2 全　序

定义 1（全序（total order）） a 上的二元关系 r 是 a 上的全序，指 r 是满足下面的三分律的（严格）偏序：

$$\forall x, y \in a(xry \vee x = y \vee yrx).$$

全序又称线序.带有全序 r 的集叫做 r _ 全序集.全序集 a 连同其上的全序 r 形成全序结构 $\langle a, r\rangle$.

全序作为集上的二元关系,具有反自反性,可递性,并满足三分律.通常数学中谈到序,往往指全序.**N,Z,Q,R** 是我们见过的全序集的例子.

思考题 1　*试在 $\mathbf{N}^2$ 上建立全序.*

定义 1 中规定的全序 r 是严格全序,xry 常写作 $x<y$.若改用"$\leqslant$"来定义,则把集 a 上全序则规定为满足下面条件的偏序:

$$\forall x, y \in a(x \leqslant y \vee y \leqslant x).$$

全序比偏序要求更高的一点是:任何元素之间都可比较.

对于全序集,极小元就是最小元,极大元就是最大元.

思考题 2　*证明不能在复数域 $\langle \mathbf{C}, 0, 1, +, \cdot\rangle$ 中定义全序使之成为有序域(有序域的概念参见§4.5).*

例 1　复数域不是有序域,但仍可在 **C** 中定义序.例如,在 **C** 中定义两个二元关系 r 与 s:

$$z_1 r z_2 \leftrightarrow (\mathrm{Re} z_1 < \mathrm{Re} z_2) \wedge (\mathrm{Im} z_1 < \mathrm{Im} z_2),$$

$$z_1 s z_2 \leftrightarrow (\mathrm{Re} z_1 < \mathrm{Re} z_2) \vee (\mathrm{Re} z_1 = \mathrm{Re} z_2 \wedge \mathrm{Im} z_1 < \mathrm{Im} z_2).$$

r 是 **C** 上的一个偏序,但不是全序(例如 1 与 i 按 r 不可比).在复数平面上,位于一、三象限的过原点的任一直线都是 **C** 的一个 r _ 链(全序子集).s 是 **C** 上的全序(一种字典顺序).

若 $\langle a, r\rangle$ 是全序结构且 $b \subset a$,则易知子结构 $\langle b, r \cap (b \times b)\rangle$ 也是全序结构,简写为 $\langle b, r\rangle$.

若 r 是 a 上的全序,则 r^{-1} 也是 a 上的全序(参见§7.1 练习 3).

练习 1　*${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上两个二元关系 r 与 s 的定义如下:*

$$frg \leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}(f(n) < g(n)),$$

$$fsg \leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}(f(k) < g(k) \wedge \forall n < k(f(n) = g(n)).$$

证明 r 是 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上偏序但不是全序,而 s 是 ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 上全序.

下面研究全序集之间的关系.

定义 2(保序映射(order-preserving mapping))　设 a, b 是全序集,且 $f: a \to b$ 满足

$$\forall x, y \in a(x < y \to f(x) < f(y)) \tag{1}$$

则把 f 叫做 a 到 b 的保序映射.

关于保序映射,有以下简单事实.

1°　设 a 是全序集,b 是偏序集,$f: a \to b$ 具有性质(1),则 a 的像 $f[a]$ 是

b 中的全序子集(即链).

2° 设 f 是全序集 a 到全序集 b 的保序映射,则易知 f 是 a 到 b 的单射,且(1)的反向蕴涵也成立:

$$\forall x, y \in a(x < y \leftrightarrow f(x) < f(y)).$$

3° 按§5.2关于结构间同构的一般定义及事实2°,若存在全序集 a 到全序集 b 的保序满射,则 a 与 b 同构:

$$\langle a, < \rangle \cong \langle b, < \rangle.$$

定义 3 (前段(initial segment)) 设 a 是全序集,$b \subset a$. 若 b 满足

$$\forall x \in b \forall y \in a(y < x \rightarrow y \in b),$$

则 b 叫做 a 的前段.

例如,开区间 $(-\infty, 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 的前段,负整数集 $\mathbf{Z}^- = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 0\}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的前段(皆按通常的序).

练习 2 设 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 是保序映射. 证明: $\forall n \in \mathbf{N}(f(n) \geqslant n)$.

练习 3 设 $\mathbf{N}$ 的真子集 a 是 $\mathbf{N}$(按通常序"$<$")的前段. 证明

$$\exists n \in \mathbf{N}\ a = \{k \in \mathbf{N} \mid k < n\}.$$

思考题 3 能否用多种不同方式建立 $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ 到它自身的同构(映射)? (这种同构叫做自同构.)

思考题 4 能否用多种不同方式建立 $\langle \mathbf{N}, < \rangle$ 的自同构?

思考题 5 能否建立 $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ 到它的前段 $\langle (-\infty, 0), < \rangle$ 的同构?

思考题 6 能否建立 $\langle \mathbf{N}, < \rangle$ 到它前段的同构?

全序集在同构之下能保持的性质叫做序性质. 例如,元素是否极大或极小,是序性质;而实数区间的长度(大小及是否有限)就不是序性质,因为在 $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ 与 $\left\langle \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), < \right\rangle$ 之间存在序同构. 在 $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ 与 $\left\langle \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], < \right\rangle$ 之间不可能存在同构,因为 $\mathbf{R}$ 无极大元,而 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 有极大元;而极大极小是序性质,应在同构之下保持.

全序集间的同构具有如下性质.

自反性: $a \cong a$. (恒等函数是保序双射.)

对称性: $a \cong b \rightarrow b \cong a$. (保序双射 f 之逆 f^{-1} 也是保序双射.)

可递性: $a \cong b \wedge b \cong c \rightarrow a \cong c$. (保序双射的复合仍为保序双射.)

§7.3 良　　序

良序是集论最重要的中心概念之一. 良序概念的引进实质上是人们把归

纳法从自然数集推广到超穷世界的需要，关于这一点下节将详细讨论.

定义 1(良序(well-order))　集 a 上二元关系 r，若具有以下性质，则叫做 a 上的良序：

1°　(反自反性)　$\forall x \in a \neg(xrx)$.

2°　(可递性)　$\forall x, y, z \in a(xry \wedge yrz \to xrz)$.

3°　(三分律)　$\forall x, y \in a(xry \vee x = y \vee yrx)$.

4°　(良基性)　a 的任一非空子集皆有 r_- 极小元，即

$$\forall b \subset a(b \neq \varnothing \to \exists y \in b \forall x \in b \neg(xry)).$$

带有良序 r 的集叫做 r_- 良序集. 良序集 a 连同其上的良序 r 形成良序结构 $\langle a, r\rangle$.

按定义，良序就是具良基性的全序. 因为有三分律，极小元就是最小元，所以良序集的任一非空子集都有最小元.

例 1　$\langle \mathbf{N}, <\rangle$是良序结构(参见 1.2 附 3 定理 14,15,17,19).

$\langle \mathbf{Z}, <\rangle$，$\langle \mathbf{Q}, <\rangle$与$\langle \mathbf{R}, <\rangle$都不是良序结构.

练习 1　重新定义 $\mathbf{Z}$ 中序使之成为良序.

练习 2　设 a 是良序集，且存在双射 $f: a \to b$. 证明可用集 a 的良序诱导出集 b 的良序.

练习 3　如何使 $\mathbf{Q}$ 变成良序集?

若$\langle a, r\rangle$是良序结构且 $b \subset a$，则子结构$\langle b, r \cap b^2\rangle$也是良序结构，简记为$\langle b, r\rangle$. 良序 r 的逆关系 r^{-1} 一般不再是同一集上的良序，这一点与全序不同. a 是有限集时，a 上良序 r 的逆序 r^{-1} 仍为良序.

若把 a 上的良序 r 写成<，则它的性质可列出如下：

1°　(反自反性)　$\forall x \in a\ x \not< x$.

2°　(可递性)　$\forall x, y, z \in a\ (x < y \wedge y < z \to x < z)$.

3°　(三分律)　$\forall x, y \in a\ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

4°　(良基性)　$\forall b \subset a(b \neq \varnothing \to \exists y \in b \forall x \in b\ (y \leqslant x))$.

良序集的优点之一，是它的前段容易表示. 下面讨论这种表示.

先回忆一下全序集的前段的概念. $b(<a)$是全序集 a 的前段，指每当 a 中的 $y < t \in b$ 时总有 $y \in b$.

设 a 是全序集，$x \in a$. 记

$$a_x = \{t \in a \mid t < x\},$$

a_x 就是 a 的一个前段(叫做以 x 为端点的前段). 事实上，每当 $y < t \in a_x$ 时就有 $y < x$，故总有 $y \in a_x$.

问题是：是否全序集 a 的每个真前段都能表示成某个 a_x；$x \in a$?

思考题 1 试找一全序集 a,使 a 的某个前段不能表示成$a_x=\{t\in a\mid t<x\}(x\in a)$这种形式.

对于良序集,上述问题的回答是肯定的.

命题 1 设 b 是良序集a 的真前段($b\neq a$),则存在 $x\in a$ 使

$$b = a_x = \{t \in a \mid t < x\}.$$

证 设 $c=a-b(\neq 0)$.由 a 的良基性知c 有最小元.记 c 的最小元为x,下证 $b=a_x$.

1. $t\in b$ 时,$t<x$(否则 $x\leqslant t$,从而 $x\in b$,与 $x\in c$ 矛盾),于是 $t\in a_x$;

2. $t\in a_x$ 时,因 $t<x$,故 $t\notin c$(否则与 x 最小性矛盾),于是 $t\in b$. □

形为 a_x 的前段由 a 中所有小于 x 的元素构成.每当遇见 a_x,自然有 $x\in a$,且 $x\notin a_x$(否则与序的反自反性矛盾).

练习 4 证明$(a_x)_y=a_y$.

根据练习 4,前段的前段仍是该良序集的前段.

前段在同构之下保持.具体地说,设 $f:a\cong b,x\in a$,且 a,b 都是良序集.根据 f 的保序性,将 f 限制在a_x 上便得a_x 到$b_{f(x)}$的保序双射:

$$f\restriction a_x:a_x\cong b_{f(x)}.$$

练习 5 设 $r\subset a^2,\langle b,<\rangle$是良序结构,且 $f:a\to b$ 满足

$$\forall x,y\in a(xry\to f(x)<f(y)).$$

证明这时 r 具有良基性:a 的任一非空子集有r 极小元.

7.3 附 良序指标集

数学上研究集族时,为了便于操作,常给族中每个集赋以指标.设集族 A 的指标集为I,则该集族可表示成

$$A = \{a_i \mid i \in I\}.$$

上面的 I 可以是任意指标集.特殊情形,当集族是可数族时,指标集为 ω.

通常把集族的并与交写成:

$$\bigcup \{a_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i\in I}a_i,$$

$$\bigcap \{a_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I}a_i.$$

在关于可数族的论证中,若所涉及到的只与 ω 的良序性有关,那么这种论证往往可推广到有良序指标集的集族.这是良序的又一优点.正因如此,通常总希望集族的指标集是良序集.

一个重要例子是,当指标集 I 是良序集时,集族 $A=\{a_i\mid i\in I\}$可以"不

交化",意思是:存在集族 $B=\{b_i \mid i\in I\}$ 满足:

1° $\forall i\in I\ b_i\subset a_i$,

2° $\bigcup_{i\in I}b_i=\bigcup_{i\in I}a_i$ (即 $\bigcup B=\bigcup A$),

3° B 的所有成员互不相交.

满足上述三个条件的集族 B 叫做集族 A 的"不交族".

命题 1(集族不交化) 设 $A=\{a_i \mid i\in I\}$, $B=\{b_i \mid i\in I\}$,其中指标集 I 是良序集,且

$$b_i = a_i - \bigcup_{j<i}a_j,$$

那么 B 是 A 的不交族.

证 关键是证明事实

$$x \in a_i \to \exists k \leqslant i(x \in b_k). \qquad (1)$$

设 $x\in a_i$,则 $\{j\in I \mid x\in a_j, j\leqslant i\}\neq\varnothing$. 把 x 所属的 a_j 的最小下标(由 I 的良序性知其存在)记作 k:

$$k = \min\{j \in I \mid x \in a_j, j \leqslant i\},$$

这时 $k\leqslant i$ 且有

$$x \in a_k - U_{j<k}a_j \quad (\text{注意 } k \text{ 的最小性}).$$

此即 $x\in b_k$. (1)证毕.

由事实(1)即知

$$\bigcup_{i\in I}a_i = \bigcup_{i\in I}b_i,$$
$$\bigcup_{j<i}a_j = \bigcup_{j<i}b_j.$$

再由

$$b_i = a_i - \bigcup_{j<i}a_j = a_i - \bigcup_{j<i}b_j$$

知 $j<i$ 时, $b_i\cap b_j=\varnothing$,即 B 的所有成员互不相交,这说明 B 是 A 的不交族.

□

§7.4 超限归纳法

上节建立了良序集的概念. 良序集,就是其任一非空子集皆有最小元的全序集;或者说,良序就是具有良基性的全序.

人类数学在进入集的超穷世界之前,早已有了用有限认识无限的重要武器——数学归纳法,这一方法是支撑起古典分析大厦的基石. 集论中的良序,正与超穷世界中的归纳法有关.

第一章里我们由 Peano 公理出发定义了 **N** 上的加法,又用加法引进了 **N**

上的全序“$<$”(1.2 附 3 定义 3,定理 14,15,17),然后证明了事实(1.2 附 3 定理 19):

自然数集 $\mathbf{N}$ 的任一非空子集必有最小数.

用符号写出来是:

$$\forall L \subset \mathbf{N}(L \neq \varnothing \rightarrow \exists m \in L \forall n \in L(m \leqslant n)).$$

这一性质就是良基性,它使 $\mathbf{N}$ 成为良序集.关于 $\mathbf{N}$ 的强归纳法(第二归纳法)正是这一性质的直接推论(1.2 附 3 定理 20).

由此可见,归纳法有望从自然数集 $\mathbf{N}$ 很自然地推广到一般的良序集.这一点可以说是良序集的最重要的优点.

下面定理中的 $p(x)$ 是用集论语言写出的含自由变元 x 的某个公式,简单地说,是 x 的某种性质.

定理 1 (超限归纳法) 设 a 是良序集,$p(x)$ 是集 x 的某个性质.若

$$\forall x \in a\ (\forall y < x p(y) \rightarrow p(x)), \tag{1}$$

则 $\forall x \in a\ p(x)$.

证 作集

$$b = \{x \in a \mid p(x)\text{ 不成立}\},$$

要证 $b=\varnothing$.反设 $b\neq\varnothing$,即存在 $x\in a$ 使 $p(x)$ 不成立,那么 b 有最小元(这是良序集所具有的良基性).设 b 的最小元为 x_0.因 $x_0\in b$,故 $p(x_0)$ 不成立.但又因 x_0 是最小的,比 x_0 小的任一 y 都使 $p(y)$ 成立,即

$$\forall y < x_0\ p(y),$$

这时由已知条件(1),$p(x_0)$ 又必须成立,矛盾. □

超限归纳法用来证明形为 $\forall x \in a\ p(x)$ 的全称命题,其中 a 是良序集.通常的数学归纳法是它的特殊情形:$a=\mathbf{N}$.一般情形下,a 可以是 $\mathbf{N}$ 的任一子集,也可以是别的良序集;可以是有限集,也可以是无限集;可以是可数集,也可以是不可数集.

用超限归纳法证明命题 $\forall x \in a\ p(x)$,步骤与通常的归纳法相同.任取 $x\in a$,先作归纳假设:$y<x$ 时 $p(y)$ 都成立,然后证明 $p(x)$ 也成立.在这之前,第一步,先要对 a 的最小元 x_0 直接验证 $p(x_0)$ 成立,这是因为对最小元没有归纳条件可用.

例 1 良序集之间同构的惟一性.

设 a,b 是良序集,f 与 g 都是 a 到 b 的同构,且 $a,b\neq\varnothing$(否则同构是 $\varnothing$),下面用超限归纳法证明 $f=g$,即 $\forall x\in a\ (f(x)=g(x))$.

第一步,设 x_0 是 a 的最小元,易见 $f(x_0)=g(x_0)$.这是因为 f 与 g 都是保序双射,$f(x_0)$ 与 $g(x_0)$ 都是 b 的最小元.

作归纳假设：当 $t<x$ 时有 $f(t)=g(t)$. 要证 $f(x)=g(x)$. 反设 $f(x)<g(x)$，由 g 的满射性，可设 $t\in a$ 使 $g(t)=f(x)(<g(x))$. 由 g 的保序性知 $t<x$. 再由归纳假设得 $f(t)=g(t)$. 这与 $g(t)=f(x)$ 及 f 的保序性矛盾.

也可用另一种方式写出例 1 中同构的惟一性的证明. 为证 $\forall x\in a(f(x)=g(x))$，作

$$c=\{x\in a\mid f(x)\neq g(x)\},$$

要证的是 $c=\varnothing$.（用反证法及用 a 的良序性，读者可试证.）

如果把例 1 中的良序集改为一般全序集，那么它们之间的同构不一定惟一.（参见 §7.2 思考题 3.）

在下面建立良序集基本定理的过程中（引理 1 的证明中）要使用超限归纳法. 这个基本定理指出了良序集的另一重要优点：相互间总可以比长短.

为证明良序集之间总可以比长短，先让我们从直观上作简要分析.

首先，空集是最短的良序集.

现设 a 与 b 是任意两个非空的良序集，且设 x_0,y_0 分别是它们的最小元. 我们让 x_0 与 y_0 对应. 再设 x_1,y_1 分别是 $a-\{x_0\}$ 与 $b-\{y_0\}$ 的最小元（假设 $a-\{x_0\}$ 与 $b-\{y_0\}$ 皆非空，否则已有长短之分），并让 x_1 与 y_1 对应. 这时有（注意 a_x 表示以 x 为端点的前段）：

$$a_{x_0}=\varnothing=b_{y_0},$$

$$a_{x_1}=\{x_0\}\cong\{y_0\}=b_{y_1}.$$

再设 x_2,y_2 分别是 $a-\{x_0,x_1\}$ 与 $b-\{y_0,y_1\}$（二者皆非空时）的最小元，并让 x_2 与 y_2 对应. 这时有

$$a_{x_2}=\{x_0,x_1\}\cong\{y_0,y_1\}=a_{y_2}.$$

依次做下去，必然出现以下三种情形中的一种（良序集基本定理的结论）.

1° a 与 b 的元素同时取尽，a 与 b 一样长：

$$a\cong b.$$

2° a 的元素已取尽而 b 仍有多余元素，这时 a 比 b 短：

$$a\cong b_y,\ y\in b.$$

3° a 有多余元素而 b 的元素已被取尽，这时 a 比 b 长：

$$b=a_x,\ x\in a.$$

上面直观上已经清楚的事情，要把证明写出来却并不轻松. 但直观上清楚并不等于数学上可靠. 下面我们来建立良序集基本定理.

引理 1　设 a 是良序集. 若映射 $f:a\to a$ 是保序的，即

$$x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2),$$

则对任意 $x\in a$ 有 $x\leqslant f(x)$.

证 使用超限归纳法证明 $\forall x\in a(x\leqslant f(x))$.

设 a 的最小元为 x_0, $x_0\leqslant f(x_0)$ 显然成立.

作归纳假设:当 $y<x$ 时有 $y\leqslant f(y)$. 下证 $x\leqslant f(x)$. 反设

$$f(x)<x. \tag{2}$$

由(2)及归纳假设(令 $y=f(x)$)得

$$f(x)\leqslant f(f(x)). \tag{3}$$

又由(2)及 f 的保序性得

$$f(f(x))<f(x). \tag{4}$$

(3)与(4)矛盾. □

思考题 1 *把引理 1 中的"a 是良序集"改为"a 是全序集",引理 1 的结论是否仍然成立?*

由引理 1 立即可得良序集的又一重要性质:

引理 2 良序集和它的任一真前段不同构.

证 设 a 是良序集. 任取 a 的真前段(注意§7.3 命题 1)a_x:

$$a_x=\{t\in a\mid t<x\},\ x\in a.$$

反设 $a\cong a_x$,并设 f 是 a 到 a_x 的保序双射. 因 $x\in a$,故 $f(x)\in a_x$. 由 a_x 的定义, $f(x)<x$;但由引理 1 知 $x\leqslant f(x)$,矛盾. □

思考题 2 *把引理 2 中的"良序集"改为"全序集",结论是否成立?*

引理 3 设 a,b 为良序集. 以下三种情形至多出现一种:

1° $a\cong b$,

2° $a\cong b_y, y\in b$,

3° $b\cong a_x, x\in a$.

证 由引理 2 立即知 1°与 2°, 1°与 3°不会同时成立.

现假设 2°与 3°同时成立. 由 2°,设 $f: a\cong b_y, y\in b$;由 3°,有 $b\cong a_x$, $x\in a$.

这时有

$$a_x\cong(b_y)_{f(x)}=b_{f(x)}\quad(\text{参见 §7.3 练习 4}),$$

由此及 3°即得 $b\cong b_{f(x)}$,与引理 2 矛盾. □

定理 2(良序集基本定理) 对任意良序集 a 与 b,有

$$a\cong b\ \vee\ \exists y\in b\ (a\cong b_y)\ \vee\ \exists x\in a\ (b\cong a_x).$$

证 作 a 到 b 的关系 f:

$$f=\{(x,y)\in a\times b\mid a_x\cong b_y\}.$$

记

$$d = \mathrm{Dom}(f)(\subset a), \quad r = \mathrm{Ran}(f)(\subset b),$$

于是$(x,y)\in f$意味着$x\in d$，$y\in r$且$a_x\cong b_y$.

我们有以下事实.

1. f是d到r的映射：

$$\forall x \in d\, \exists !y \in r\ (x,y) \in f.$$

理由是：因d与r分别是f的定义域与值域，故对任意$x\in d$皆有$y\in r$使$(x,y)\in f$；且y是惟一的，因为

$$(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \rightarrow a_x \cong b_{y_1} \wedge a_x \cong b_{y_2}$$
$$\rightarrow y_1 = y_2.$$

上面最后一步的理由是：若$y_1<y_2$($y_2<y_1$时类似)，则有

$$b_{y_2} \cong b_{y_1} = (b_{y_2})_{y_1} \quad (\text{注意 §7.3 练习 4}),$$

这与引理2矛盾.

2. f是d到r的双射：

$$\forall y \in r\, \exists !x \in d \quad (x,y) \in f.$$

理由与事实1相同(r与d间有对称性).

3. f是保序的. 事实上，设d中$x_1<x_2$，则r中对应有$y_1<y_2$(即$f(x_1)<f(x_2)$). 这是因为：单射性使$y_1\neq y_2$，但若$y_2<y_1$，则有

$$b_{y_1} \cong a_{x_1} = (a_{x_2})_{x_1},$$
$$a_{x_2} \cong b_{y_2} = (b_{y_1})_{y_2},$$

上面二式与引理3矛盾.

以上三个事实说明f是d到r的同构，即有$f:d\cong r$.

下证$d=a$与$r=b$这二者必居其一. 反设$d\neq a$且$r\neq b$.

$d\neq a$，则$a-d$有最小元，记为x_0. 我们来证明$d=a_{x_0}$. 先设$x\in a_{x_0}$，这时$x<x_0$且$x\in d$，因x_0在$a-d$中是最小的. 再设$x\in d$，则$x\neq x_0$(因$x_0\in a-d$). 这时要证$x<x_0$，从而$x\in a_{x_0}$. 事实上，若设$x>x_0$，则因$x\in d$，故由d与f的定义知，存在$y\in b$及同构$g:a_x\cong b_y$；这时有

$$a_{x_0} \cong b_{g(x_0)},$$

此式说明$(x_0,g(x_0))\in f$，从而$x_0\in d$，与$x_0\in a-d$矛盾.

由d与r的对称性知，$r\neq b$时有$r=b_{y_0}$，其中y_0是$b-r$的最小元.

至此知：当$d\neq a$且$r\neq b$时有

$$a_{x_0} = d \cong r = b_{y_0},$$

此式导致$(x_0,y_0)\in f$及$x_0\in d$,这与$x_0\in a-d$矛盾.

既然$d=a$或$r=b$成立,那么下面三种情形必居其一:

1° $a=d\wedge b=r$,此时$a\cong b$.

2° $a=d\wedge b\neq r$,此时$a\cong r=b_{y_0}$,y_0是$b-r$的最小元.

3° $a\neq d\wedge b=r$,此时$b\cong d=a_{x_0}$,x_0是$a-d$的最小元. □

推论1 若a,b是良序集,则有

$$a\leqslant b\vee b\leqslant a.$$

§7.5 关于结构$\langle\omega,\in\rangle$的练习

从自然数走向超限数,遇见的头一个关节点是ω.ω作为自然数集这个抽象数学概念在集论中的具体化,是个最小的超限数.本节的练习帮助我们深入认识ω的具体的集论构造.将这种认识加以推广,人们最终形成了精巧的一般序数概念.

在做练习之前,让我们回忆一些有关概念.

无限公理(ZF6)断言归纳集存在.集s是归纳集,指s满足:

1° $\varnothing\in s$,

2° $\forall x\in s(x'\in s)$,

其中$x'=x\cup\{x\}$是x的后继.

集ω的定义:

$$\omega=\{x\in s\mid x\in\text{每个归纳集}\},$$

其中s是某个归纳集.ω也是归纳集,且是最小的归纳集(3.6.1命题1).若令$0=\varnothing$,则ω满足Peano公理(3.6.1定理1),故ω被称作自然数集,具有我们熟知的自然数集的性质,例如我们在第一章中建立的自然数加法、乘法及序($<$)的通常性质(见1.2附3),那里的序($<$)是用加法定义的(1.2附3定义3).于是自然数都有了集的定义:

$$0=\varnothing,1=\{\varnothing\}=\{0\},2=\{\varnothing\{\varnothing\}\}=\{0,1\},\cdots.$$

我们看到,由空集$\varnothing$出发反复取后继,便可得到所有自然数,每个自然数都是由较小的自然数组成的.这里说较小,是用$\in$比大小:$m\in n$时说m比n小.

集a是可递集,指a的所有元素的元素仍皆是a的元素:

$$\forall x\in a\,\forall y\in x(y\in a),\text{即}\bigcup a\subset a.$$

练习1 设a是可递集,则(填空):

$$\forall x \in a(x ___ a),$$
$$\forall x \in a(x ___ \mathscr{P}(a)),$$
$$a ___ \mathscr{P}(a).$$

每个自然数都是可递集(3.6.1 命题 3).

若集 x 具有性质 $x \notin x$,则说 x 具有 $\in_-$ 反自反性.每个自然数都具有 $\in_-$ 反自反性(3.6.1 命题 4).

练习 2　$\forall k,m,n \in \omega(k \in m \land m \in n \to k __ n)$,这是因为________.至此可以说 $\langle \omega, \in \rangle$ 是个______结构.

练习 3　设 $n \in \omega$,试证:$n = 0 \lor 0 \in n$.(这说明 0 是 ω 的 $\in_-$ 最小元.)

练习 4　设 $n, m \in \omega$,试证:$n \in m \to (n' = m \lor n' \in m)$.

练习 5　设 $n, m \in \omega$,试证:$n \in m \lor n = m \lor m \in n$(此为 ω 的 $\in_-$ 三分律).

练习 6　(填空)练习 2 后面部分与练习 5 说明 $\langle \omega, \in \rangle$ 是______结构.

练习 7　设 $n \in \omega$,证明 $m \in n \to m \in \omega$.(这说明 ω 是可递集).

练习 8　设 $n \in \omega$,证明 $\langle n, \in \rangle$ 是全序结构.

练习 9　设 $n \in \omega, b \subset n$ 且 $b \neq \varnothing$.证明:b 有 $\in_-$ 最小元,即

$$\exists m \in b \forall k \in b(m = k \lor m \in k).$$

练习 10　(填空)设 $n \in \omega$.练习 8 与练习 9 说明 $\langle n, \in \rangle$ 是______结构.

练习 11　设 $n \in a \subset \omega$,且 $n \cap a = \varnothing$,证明 n 是 a 的 $\in_-$ 最小元.

练习 12　设 $n \in a \subset \omega$,且 $n \cap a \neq \varnothing$.试证:

(1) $n \cap a$ 有 $\in_-$ 最小元.

(2)设 $n \cap a$ 的 $\in_-$ 最小元为 m,则 m 也是 a 的 $\in_-$ 最小元.

练习 13　设 $a \subset \omega$,试证:若 $a \neq \varnothing$,则 a 有 $\in_-$ 最小元.

练习 14　(填空)练习 6 与练习 13 说明 $\langle \omega, \in \rangle$ 是______结构.

练习 15　第一章中的 1.2 附 3 定理 14,15,17,19 说明 $\langle \omega, < \rangle$ 也是良序结构("$<$"是用加法定义的).证明:

$$\forall m, n \in \omega(m \in n \leftrightarrow m < n).$$

第八章 序 数

在对超穷世界进行艰苦探索的过程中,人们建立起精巧的序数理论.集论中的序数是自然数概念的推广.这种推广是研究超穷对象的需要,是在超穷世界中建立秩序的需要;当自然数概念在集论里得到具体化之后(参见3.6.1),这种推广是人们要采取的必然步骤.序数对人们认识超穷世界所起的作用,犹如自然数在经典数学中所起的作用.

随着序数理论的建立,ZF 公理系统也得到完善.本章在介绍序数理论的过程中也将介绍 ZF 系统最后的公理:替换公理与正则公理.

§8.1 序数的概念及一般性质

直观上,序数是表示次序的数,可用于事物的区分、排队、编号.作为集论中的概念,什么样的集具有这种表示次序的功能? 从对结构$\langle \omega, \in \rangle$的研究(§7.5)得到启发,我们可把序数规定为一种特殊的良序集;当然,要使自然数是序数的特例.

定义 1(序数(ordinal)) $\in_-$良序的可递集叫做序数.或者说,具有以下性质的集 α 叫做序数:

1° ($\in_-$反自反性) $\forall x \in \alpha (x \notin x)$.

2° ($\in_-$可递性)$\forall x, y, z \in \alpha (x \in y \land y \in z \to x \in z)$.

3° ($\in_-$三分律)$\forall x, y \in \alpha (x \in y \lor x = y \lor y \in x)$.

4° ($\in_-$良基性)α 的任意非空子集有$\in_-$极小元.

5° α 自己是可递集,即

$$y \in x \land x \in \alpha \to y \in \alpha.$$

对序数 α 考虑定义 1 的性质 3°,便知性质 4°中的$\in_-$极小元就是$\in_-$最小元.

下面不作说明时,$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$自动表示序数.

$0(=\varnothing)$是最简单的序数.因每个自然数都是可递集(3.6.1 命题 3),且又都是$\in_-$良序集(§7.5 练习 10),故每个自然数都是序数.§7.5 练习 7 与练习 14 说明自然数集 ω 也是个序数.ω 是我们见到的第一个超穷序数.

思考题 1 除了自然数及 ω,是否还有其他序数?

集 $a=\{0,1,3\}$ 是 $\in_-$ 良序集，但不是可递集（$3\in a$，$2\in 3$，但 $2\notin a$），所以 a 不是序数.

集 $b=\{0,1,\{1\}\}$ 是可递集，但不是 $\in_-$ 良序集（不满足定义 1 中性质 2°与 3°，例如 $0\in 1\in\{1\}$，但 $0\notin\{1\}$），所以 b 也不是序数.

我们把"α 是序数"这句话简写成"$\alpha\in\mathbf{On}$". 直观意思是用 **On** 表示由所有序数构成的对象：

$$\mathbf{On}=\{x\mid x\text{ 是序数}\}.$$

现在尚不知 **On** 是否是集. 我们把 **On** 叫做序数宇宙.

设 $\alpha\neq 0$. α 既是 $\in_-$ 良序集，必有 $\in_-$ 最小元，那就是 0.

命题 1　$\alpha\neq 0\rightarrow 0\in\alpha$.

证　设 $\alpha(\neq 0)$ 的 $\in_-$ 最小元是 α_0. 可以断言 $\alpha_0=0$. 事实上，若 $\alpha_0\neq 0$，则存在 $t\in\alpha_0$（因 $0=\varnothing$）. 因 α 是可递集，故 $t\in\alpha$，这与 α_0 的 $\in_-$ 最小性矛盾.　□

命题 1 的意思是：0 是任何非 0 序数的成员. 换句话说，若用"$\in$"比大小，即当 $x\in y$ 时说"x 比 y 小"，则 0 比任何其他序数都小.

练习 1　设 $\alpha-\{0\}\neq 0$，求 $\alpha-\{0\}$ 的 $\in_-$ 最小元.

继续研究序数的结构，要问：序数由什么构成？回答是"$\alpha\subset\mathbf{On}$".

命题 2　序数的元素也是序数：

$$x\in\alpha\rightarrow x\in\mathbf{On}.$$

证　因 α 是可递集，故有

$$x\in\alpha\rightarrow x\subset\alpha.$$

这说明当 $x\in\alpha$ 时，x 作为 $\in_-$ 良序集 α 的子集也是 $\in_-$ 良序集. 下证当 $x\in\alpha$ 时 x 也是可递集，从而 $x\in\mathbf{On}$. 事实上，设 $z\in y$ 且 $y\in x$，这时 $y\in\alpha$（因 α 是可递集且 $x\in\alpha$），进而 $z\in\alpha$（同样因 α 是可递集）；再由 α 的 $\in_-$ 可递性（定义 1 中的序数性质 2°）知 $z\in x$.　□

§7.5 中我们看到每个自然数都由较小的自然数组成. 现在知道，每个序数都由较小的序数组成：

$$\alpha=\{x\in\alpha\mid x\in\mathbf{On}\},$$

这表现了序数概念的精巧. 不仅如此，还可从序数的前段进一步看出序数概念的精巧：序数的前段与其端点同一.

命题 3　序数的前段就是该前段的端点：

$$x\in\alpha\rightarrow\alpha_x=x.$$

证　设 $x\in\alpha$，α 以 x 为端点的前段（以 $\in$ 为序）是

$$\alpha_x=\{t\in\alpha\mid t\in x\}.$$

$\alpha_x = x$，是因为我们有

$$t \in \alpha_x \leftrightarrow t \in \alpha \wedge t \in x \leftrightarrow t \in x.$$

上式最后一步的一个方向是显然的，另一个方向是因为 $x \in \alpha$ 且 α 是可递集，故由 $t \in x$ 得 $t \in \alpha$. □

下面观察序数之间的关系，从中又可以发现序数概念的精巧. 例如，序数间的同构与相等是同一的.

序数间的同构，是 $\in_-$ 良序集间的同构. α 与 β 同构($\alpha \cong \beta$)，是指存在保序双射 $f:\alpha \to \beta$；这里说 f 保序，是指

$$\forall x, y \in \alpha (x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)).$$

命题 4 $\alpha \cong \beta \to \alpha = \beta$.

证 设 $f:\alpha \cong \beta$. 先证明 $\forall x \in \alpha (f(x) = x)$. 这是个全称命题. 因 α 是 $\in_-$ 良序集，故可用超限归纳法(对 x 归纳).

$x = 0$ 时，因 0 是最小元，由 f 的保序性知 $f(0)$ 是 β 中的最小元，故 $f(0) = 0$.

假设 $t \in x$ 时，$f(t) = t$. 下证 $f(x) = x$.

先设 $t \in x$，由 f 的保序性知 $f(t) \in f(x)$，用归纳假设得 $t \in f(x)$.

再设 $t \in f(x)$. 在 β 中，$f(x) = \beta_{f(x)}$(由命题 3，端点与前段同一)，故 $t \in \beta$. f 是满射，可设 t 在 f 之下的原像是 $u(\in \alpha)$：$t = f(u)$. 于是 $f(u) \in f(x)$. 再用 f 的保序性得 $u \in x$. 最后用归纳假设 $u = f(u)(= t)$，得 $t \in x$.

既然 $\forall x \in \alpha\, f(x) = x$，说明 $\alpha \subset \beta$；对称有 $\beta \subset \alpha$，于是 $\alpha = \beta$. □

由命题 4 立即得到序数间的可比性.

命题 5 $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$.

证 既然序数都是 $\in_-$ 良序集，由良序集基本定理(§7.4 定理 2)便知关于 α 与 β 之间同构关系的三种情形三者必居其一：

$$\alpha \cong \beta_y (y \in \beta) \vee \alpha \cong \beta \vee \beta \cong \alpha_x (x \in \alpha).$$

用命题 3 得

$$\alpha \cong y (y \in \beta) \vee \alpha \cong \beta \vee \beta \cong x (x \in \alpha).$$

再用命题 4 得

$$\alpha = y \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta = x \in \alpha.$$ □

易知 $\alpha \in \beta, \alpha = \beta, \beta \in \alpha$ 这三种形至多出现一种，否则立即与 $\in_-$ 反自性矛盾.

基于序数及序数间关系的以上基本性质，我们便可开始从整体上来观察

序数宇宙 **On**.下面的定理是本节的主要结果.

定理 1　若集 a 由序数组成(即 $a\subset\mathbf{On}$),则 a 是 $\in_-$ 良序集.

证　1°　$\in_-$ 反自反性:任一 $\alpha\in a$,都有 $\alpha\notin\alpha$.反设 $\alpha\in\alpha$,由序数定义(定义 1)中的性质 1°得 $\alpha\notin\alpha$,矛盾.

2°　$\in_-$ 可递性:设 $\alpha,\beta,\gamma\in a$,则有

$$\alpha\in\beta\wedge\beta\in\gamma\rightarrow\alpha\in\gamma,$$

这是因为序数 γ 是可递集.

3°　$\in_-$ 三分律:任意 $\alpha,\beta\in a$,有 $\alpha\in\beta\vee\alpha=\beta\vee\beta\in\alpha$(由命题 5).

4°　$\in_-$ 良基性:a 的任意非空子集有 $\in$ 最小元.(证明留作练习.)　□

练习 2　*证明:由序数组成的集 a 具有 $\in$ 良基性,即 a 的任一非空子集必有 $\in_-$ 极小元.(结合 $\in_-$ 三分律,a 的 $\in_-$ 极小元就是 a 的 $\in_-$ 最小元.)*

现在让我们来观察由所有序数组成的序数宇宙 **On**:

$$\mathbf{On}=\{x\mid x\text{ 是序数}\}.$$

假设 **On** 是集.因 **On** 的成员都是序数,由定理 1,**On** 是 $\in_-$ 良序集;根据命题 2,**On** 还是可递集:

$$x\in\alpha\in\mathbf{On}\rightarrow x\in\mathbf{On}.$$

这就得出结论——**On** 也是序数:**On**$\in$**On**! 但 **On** 作为序数 **On** 的成员,应具有定义 1 中的性质 1°:**On**$\notin$**On**($\in_-$ 反自反性),矛盾.这就是有名的 Burali-Forti 悖论.它出现的根源在于假定 **On** 是集.公理集论中,人们更小心的对待集这个概念,不把 **On** 这个对象当作集.成为集,**On**"过大"了.人们把 **On** 这种对象视为一种类(真类).

§8.2　后继序数与极限序数

我们知道对于自然数,$m\in n$ 与 $m<n$("$<$"用加法定义)这二者是统一的(§7.5 练习 15):

$$m\in n\leftrightarrow m<n.$$

根据§8.1 定理 1,由序数组成的集是 $\in_-$ 良序集.考虑这些,我们常将一般序数间的关系式 $x\in y$ 写成 $x<y$.往后在具体场合,$x\in y$ 与 $x<y$ 这同一关系的两种写法视方便使用其中任一种.

练习 1　证明　$\alpha\leqslant\beta\leftrightarrow\alpha\subset\beta$.

仍用 a' 表示集 a 的后继:$a'=a\cup\{a\}$.下面的命题 1 与命题 2 事实上都是§8.1 定理 1 的推论.

命题 1 序数 α 的后继 α' 也是序数.

证 α' 的元素都是序数,因为 α' 只比 α 多了一个 α 自己. 由 §8.1 定理 1 知 α' 是 $\in_-$ 良序集. 还要证明 α' 是可递集. 设 $x\in y\in\alpha'(=\alpha\cup\{\alpha\})$. 为证 $x\in\alpha'$,分两种情形:

$y=\alpha$ 时,自然有 $x\in\alpha(\subset\alpha')$,故 $x\in\alpha'$;

$y\in\alpha$ 时,因 α 是可递集,也有 $x\in\alpha(\subset\alpha')$,$x\in\alpha'$. □

形为 α' 的序数叫做(α 的)后继序数. 每个非 0 自然数都是后继序数,但 ω 不是(见练习 4). 由 ω 出发反复使用后继运算便得到一串以前我们没有见过的新的后继序数:

$$\omega',\omega'',\cdots.$$

练习 2 证明不存在 β 使 $\alpha\in\beta\in\alpha'$.

练习 3 证明 $\alpha<\beta\to\alpha'<\beta'$.

练习 4 证明 ω 不是后继序数.

在序数宇宙中,除了 0 与 ω,剩下的是否全都是后继序数? 现尚不清楚. 下面先来建立一个形成序数的新方法.

命题 2 若集 a 的元素都是序数,则 $\bigcup a$ 也是序数,且是 a 的最小上界.

证 因序数的元素也是序数(§8.1 命题 2),故 $\bigcup a$ 的元素都是序数,从而可以对 $\bigcup a$ 用 §8.1 定理 1,知 $\bigcup a$ 是 $\in_-$ 良序集. $\bigcup a$ 是序数,因为下面的推理说明 $\bigcup a$ 还是可递集:

$$\begin{aligned} x\in y\in\bigcup a &\to \exists\alpha\in a(x\in y\in\alpha) \quad (\text{并集性质})\\ &\to \exists\alpha\in a(x\in\alpha) \quad (\alpha\ \text{是可递集})\\ &\to x\in\bigcup a. \end{aligned}$$

$\bigcup a$ 是 a 的上界,来自并集的性质:

$$\alpha\in a\to\alpha\subset\bigcup a \text{ 即 } \alpha\leqslant\bigcup a(\text{见练习 1}).$$

最后设 $\beta<\bigcup a$,即 $\beta\in\bigcup a$,于是有

$$\exists\alpha\in a(\beta\in\alpha \text{ 即 } \beta<\alpha),$$

这说明 β 不是 a 的上界,从而说明 $\bigcup a$ 是 a 的最小的上界. □

练习 5 填空:

$\bigcup 2=$____, $\bigcup\{3,5\}=$____, $\bigcup\{4,7,8\}=$____, $\bigcup 10=$____;

$\bigcap 2=$____, $\bigcap\{3,5\}=$____, $\bigcap\{4,7,8\}=$____, $\bigcap 10=$____.

练习 6 设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots\alpha_n$,则

$\bigcup\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=$____, $\bigcap\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=$____.

练习 7 填空并证明: $\bigcup\alpha'=$____.

练习 8 填空并证明: $\bigcup\{\alpha'\mid\alpha\in\beta\}=$____.

练习 9　设集 a 的元素都是序数. 证明: $\bigcap a$ 是序数, 且是 a 的最小元.

练习 10　证明 $\bigcup \omega = \omega$.

我们看见序数之中, 除了 0 与后继序数, 还有一种是既非零又非后继的序数. 我们把这第三种序数(非后继的非零序数)叫做极限序数. ω 就是一个极限序数(见练习 4), 而且是最小的极限序数, 这是因为比 ω 小的序数都是 ω 的元素, 即自然数, 它们不是 0 便是后继序数.

在认识新的极限序数之前, 先考察一下极限序数的一般特征.

命题 3　α 是极限序数充要条件:

$$\beta \in \alpha \rightarrow \beta' \in \alpha, \alpha \neq 0.$$

(这说明极限序数一定是归纳集.)

证　条件的充分性是显然的, 因为后继序数不会满足该条件. 设 α 是极限序数且 $\beta \in \alpha$. 为证 $\beta' \in \alpha$, 只用注意: $\alpha \neq \beta'$, 否则 α 是后继序数; $\alpha \notin \beta'$, 否则 $\alpha \in \beta$ 或 $\alpha = \beta$, 而这二者皆与 $\beta \in \alpha$ 矛盾. □

命题 3 也说明极限序数没有最大元. (后继序数 β' 有最大元, 那就是 β.) 下一命题指出了极限序数的另一特征: 极限序数是它自己的最小上界. (由命题 2, α 的最小上界是 $\bigcup \alpha$.)

命题 4　α 是极限序数 $\leftrightarrow \alpha = \bigcup \alpha (\alpha \neq 0)$.

证($\rightarrow$) 设 α 是极限序数, 下证 $\alpha = \bigcup \alpha$. 因 α 是可递集, 故自然有 $\bigcup \alpha \subset \alpha$. 为证 $\alpha \subset \bigcup \alpha$, 设 $x \in \alpha$. 这时由命题 3 知 $(x \in) x' \in \alpha$, 于是 $x \in \bigcup \alpha$.

($\leftarrow$) 设 $\alpha = \bigcup \alpha$, 但 $\alpha (\neq 0)$ 不是极限序数: $\alpha = \beta'$. 此时注意 $\bigcup \beta' = \beta$ (参见练习 7), 便得

$$\alpha = \bigcup \alpha = \bigcup \beta' = \beta \in \beta' = \alpha,$$

这与 $\in_-$ 反自反性矛盾. □

与极限序数不同, 后继序数 β' 的最小上界 ($\bigcup \beta'$) 不是 β' 自己, 而是自己的最大元: $\bigcup \beta' = \beta$ (练习 7).

思考题 1　尝试寻找不同于 ω 的极限序数.

§8.3　替换公理

前面介绍的 ZF 公理 (ZF1 ～ ZF6) 大体上是 Zermelo 于 1908 年提出的. Fraenkel 与 Skolem 分别于 1922 年与 1923 年提出了替换公理, 该公理使序数理论更加完善, 并使之成功地应用于认识超穷世界.

除了自然数这样的有限序数, 我们还认识了序数宇宙 **On** 中的一些超穷序数:

$$\omega, \omega', \omega'', \cdots, \omega^{(n)}, \cdots. \tag{1}$$

现在我们来尝试寻找新的更大的序数.很自然的想法是将上面(1)中的一行序数并在一起：

$$\bigcup\{\omega^{(n)} \mid n \in \omega\} = \omega \cup \omega' \cup \omega'' \cup \cdots \tag{2}$$

按§8.2命题2,我们似乎得到了更大的序数(即上面(2)中的并).问题是:(1)中的序数序列是否形成一个集？直观上看似乎是集,因为(1)中序数全体与自然数集之间存在一一对应,二者规模相同,但所有现有的ZF公理都不能用于说明前者是个集.下面我们将看到,类似的情形在更重要的场合不止一次出现.

按已往经验,为防止悖论,必须对集的规模有所限制,不能让集“过大”.但类似于(1)中序列这样“不太大”的对象,它们作为另外的集的“影像”,应该被承认是集.这就需要作出新的规定.例如,规定：

能与一已知集建立一一对应的对象也是集.

更放松一点,可以规定：

已知集上“可定义函数”的值域也是集.

更准确地说出上面的话,便是人们采用的新的公理：

ZF7(替换公理(Axiom of Replacement)) 设集 a 和公式 $\varphi(x,y)$ 满足单值性条件

$$\forall x \in a\, \exists!\; y\, \varphi(x,y), \tag{3}$$

则下面的对象也是集：

$$\{y \mid \exists x \in a\; \varphi(x,y)\}. \tag{4}$$

应用ZF7,单值性条件(3)是前提.若(3)成立,即集 a 的每个成员 x 都能通过使公式 $\varphi(x,y)$ 成立的方式找到惟一的集 y 作为 x 的“替身”,则这些“替身”构成一个集(见(4)).

有了ZF7,便知序数序列(1)形成集,这是因为每个自然数对应于该序列中惟一的一项,于是这些项构成集.这样一来,用并集公理便得到一个新的序数,即(2)中的并集.按§8.2命题2,该序数是序数序列(1)的最小上界.易知该序数没有最大元,故它是极限序数.

练习1 *设 a 是集.证明 $\{\mathscr{P}(x) \mid x \in a\}$ 是集.*

下面建立的定理1是将序数理论应用于超穷世界的重要一步,是超穷论法的一个基础性结论.注意定理1的证明要用到替换公理.

定理1(序型定理) 每个良序集都有与之同构的惟一序数：

$$a \text{ 是良序集} \to \exists!\; \alpha(a \cong \alpha)$$

证 惟一性较简单,因为序数间的同构与相等是同一的(§8.1命题4).

若同时有 α, β 使 $a \cong \alpha$ 且 $a \cong \beta$，则有 $\alpha \cong \beta, \alpha = \beta$.

注　在证明 α 的存在性之前，先直观上作一分析. 为了寻找与 a 同构的序数 α，很自然的作法是让良序集 a 的全部元素从最小元开始由小到大一个不漏地用序数编号，号码当然也从 0 开始，由小到大(不重复地)使用：

a：　　$s, t, u, v, \cdots, x, \cdots,$

号码：　$0, 1, 2, 3, \cdots, \beta, \cdots.$

注意序数与其前段同一，a 中以 x 为端点的前段用 a_x 表示，那么

"x 的编号是 β"可表示成"$\alpha_x \cong \beta$".

我们有：

$$a_s \cong 0, a_t \cong 1, a_u \cong 2, \cdots, a_x \cong \beta, \cdots.$$

上述过程终结，α 便产生出来了. 但问题是：是否可能 a 中有某些元素拿不着号码？即编号过程尚未结束而序数已全部用完？回答是不会，因为有了替换公理(ZF7)；按替换公理，集 a 的元素对应的号码的全体也是集，只是序数宇宙 **On** 的一个小部分.(以上只是直观分析. 下面证明的开始，我们并不假设 a 的每个元素 x 都一定有相应的编号 β：$a_x \cong \beta$.)

下证 α 的存在性. 作集 a 的(由可编号元素组成的)子集 b：

$$b = \{x \in a \mid \exists \beta \, a_x \cong \beta\}.$$

由内涵公理知 b 是集，且满足

$$\forall x \in b \, \exists ! \, \beta (a_x \cong \beta).$$

再由替换公理知下面的 Γ(由 b 中元素对应的序数编号组成)也是集：

$$\Gamma = \{\beta \mid \exists x \in a \, \beta \cong a_x\}. \tag{5}$$

Γ 由序数组成，由 §8.1 定理 1 知 Γ 是 $\in_-$ 良序集. 不仅如此，Γ 还是可递集. 为证 Γ 是可递集，设 $\gamma \in \beta \in \Gamma$，要证 $\gamma \in \Gamma$. 由 Γ 的定义，可取 $x \in b$ 使 $\beta \cong a_x$. 设 f 是 β 到 a_x 的一个保序双射. 这时有

$$\gamma = \beta_\gamma \cong (a_x)_{f(\gamma)} = a_{f(\gamma)}, \tag{6}$$

上式中间一步是由于把 f 限制在 γ 上，便得 β_γ 到 $(a_x)_{f(x)}$ 的保序双射；最后一步注意 §7.3 练习 4，(5)与(6)说明 $\gamma \in \Gamma$. 至此，我们知道 Γ 是个序数. 把 Γ 改写为 α，剩下要证明 $a \cong \alpha$，从而，α 即为所求的序数.

根据良序集基本定理(§7.4 定理 2)，有 $a \cong \alpha$，或 $a \cong \alpha_\beta (\beta \in \alpha)$，或 $\alpha \cong a_x (x \in a)$. 但三种情形的后两种是不会出现的，从而 $a \cong \alpha$. 先假设 $a \cong \alpha_\beta (= \beta)$. 因 $\beta \in \alpha$，由(5)式(Γ 即 α)知存在 $x \in a$ 使 $\beta \cong a_x$；这导致 $a \cong a_x$，与 §7.4 引理 2 矛盾. $\alpha \cong a_x (x \in a)$ 也不会出现，否则由(5)式知 $\alpha \in \alpha$(即 Γ)，与 $\in_-$ 反自反性矛盾. □

定理 1 指出,任何良序集都有惟一的一个与之同构的序数,我们把这个序数叫做该良序集(或良序结构)的序型.有相同序型的良序集有着相同的序结构.

每个良序集都有序型(即与之同构的序数),这是良序的又一重要优点.对于良序集,可按"型号"对它们加以区分.

练习 2 在良序集 a 的后继集 $a' = a \cup \{a\}$ 中令 a 是 a' 的最大元,便扩充了 a 中原有的序.证明这时 a 与 a' 的序型不同.

练习 3 在 ω 上重新定义良序 r,使 $\langle \omega, \in \rangle$ 与 $\langle \omega, r \rangle$ 有不同序型.

练习 4 重新规定整数集上的序使之成为序型为 ω 的良序集.

§8.4 关于序数的超限归纳法

§7.4 定理 1 已将归纳法由自然数集推广到一般良序集,用于证明形为

$$\forall x \in a p(x)$$

的全称命题,其中 a 是某个良序集(例如 a 是某个序数),$p(x)$ 是 x 的某个性质.

下面将归纳法再由良序集推广到序数宇宙 **On** 上,用于证明下面形式的命题:

$$\forall \alpha P(\alpha).$$

定理 1(**On** 上的超限归纳法) 假设下式成立:

$$\forall \alpha (\forall \beta < \alpha p(\beta) \to p(\alpha)), \tag{1}$$

那么便有 $\forall \alpha p(\alpha)$.

证 反设 $\forall \alpha p(\alpha)$ 不成立.于是可任意取定一 α 使 $p(\alpha)$ 不成立.用此 α 作另一集 a:

$$a = \{\beta < \alpha \mid p(\beta) \text{不成立}\}.$$

可分以下两种情形推出矛盾:

情形 1,$a = \varnothing$.此时有

$$\forall \beta < \alpha p(\beta).(\text{否则 } a \neq \varnothing.)$$

由此及(1)得 $p(\alpha)$ 成立,与 α 的取法矛盾.

情形 2,$a \neq \varnothing$.a 作为序数 α 的非空子集必有最小元,记作 α_0,这时有

$$\alpha_0 < \alpha \text{ 且 } p(\alpha_0) \text{不成立}. \tag{2}$$

由 α_0 的最小性即得

$$\forall \beta < \alpha_0 p(\beta).$$

由此及(1)得 $p(\alpha_0)$ 成立,与(2)矛盾. □

使用 On 上的超限归纳法的步骤与使用通常的归纳法类似. 按照定理 1, 为证明形如 $\forall \alpha p(\alpha)$ 这样的命题, 要做的事就是证明(1)成立, 即在作归纳假设 $\forall \beta<\alpha p(\beta)$ 之后来证明 $p(\alpha)$. 因序数有三种: 0, 后继序数与极限序数. 故具体的证明过程常分三种情形进行.

(i) 先证 $p(0)$ 成立. ($\alpha=0$ 时无归纳假设条件可用.)

(ii) 对后继序数 $\alpha=\beta'$, 常假设 $p(\beta)$ 成立, 证明 $p(\beta')$ 也成立.

(iii) 当 α 是极限序数时, 假设 $\forall \beta<\alpha p(\beta)$ 成立, 证明 $p(\alpha)$ 也成立.

类似于定理 1 的超限归纳证明法, 自然数集 ω 上的递归定义法可推广到序数宇宙 On. (详见下面 8.4 附.) 现以例说明这种超限归纳定义法的应用.

例 1　序数加法 $\alpha+\beta$ 可对 β 递归定义如下:

$$\alpha+0=\alpha.$$

$$\alpha+\beta'=(\alpha+\beta)'.$$

$$\alpha+\beta=\bigcup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\beta\}\quad(\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时}).$$

按加法定义的前二式, 后继序数 α' 可写成:

$$\alpha'=(\alpha+0)'=\alpha+0'=\alpha+1.$$

例 2　序数乘法 $\alpha\cdot\beta$ 可对 β 递归定义如下:

$$\alpha\cdot 0=0.$$

$$\alpha\cdot\beta'=\alpha\cdot\beta+\alpha.$$

$$\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma<\beta\}\quad(\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时}).$$

序数加法与乘法是自然数相应运算的推广. 结合律对一般序数的加法与乘法仍然保持成立, 但交换律不再保持.

练习 1　证明 $1+\omega\neq\omega+1$.

练习 2　证明 $\omega\cdot 2\neq 2\cdot\omega$.

练习 3　证明 $\alpha_1<\alpha_2\leftrightarrow \beta+\alpha_1<\beta+\alpha_2$.

练习 4　设 γ 是极限序数, 证明 $\beta+\gamma$ 也是极限序数.

练习 5　证明 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

例 3　序数的指数运算, 可递归定义如下:

$$\alpha^0=1.$$

$$\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha,$$

$$\alpha^\beta=\bigcup\{\alpha^\gamma \mid \gamma<\beta\}\quad(\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时}).$$

由定义, $2^\omega=\bigcup\{2^n \mid n\in\omega\}=\omega$. 这与后面的基数指数运算不同.

序数由小到大的排列是

$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega\cdot 2,\omega\cdot 2+1,\cdots,\omega\cdot 3,\cdots\omega^2,\cdots,\omega^3,\cdots\omega^\omega,\cdots,\omega^{\omega^\omega},\cdots$.

8.4 附 On 上的递归定义

先从集运算谈起. 我们已经遇见不少集运算,如:

后继运算 $x'=x\cup\{x\}$,

并集运算 $\bigcup x=\{y\mid\exists t\in x\ y\in t\}$,

幂集运算 $\mathscr{P}(x)=\{y\mid y\subset x\}$,等等.

现来讨论一般的一元集运算. 如果含有两个自由变元的集论公式 $\varphi(x,y)$满足

$$\forall x\exists!\ y\varphi(x,y), \tag{1}$$

即每个集 x 用让公式$\varphi(x,y)$成立的方式对应于惟一一个集 y,那么我们说公式 $\varphi(x,y)$确定了一个一元集运算 φ,并用写 $y=\varphi(x)$代替写 $\varphi(x,y)$.

我们没有把这种集运算叫做函数,因为这种集运算的"定义域"不是集而是整个集宇宙. 基于这一点,常把上述集运算称作"类函数".

作为确定集运算的公式 φ,前提要满足条件(1). 满足(1),就可由每个集 x 经运算得到一个集 y.

设 φ 是个集运算(即满足(1)). 如果我们把变元 x 限定在一个集a 中,那么运算 φ 便在集a 上确定了一个函数$\varphi\restriction a:a\to\varphi[a]$. 我们仍按习惯把$\varphi\restriction a$ 叫做 φ 在a 上的限制. 这里用了替换公理,因为按(1),我们有

$$\forall x\in a\ \ \exists!\ y\varphi(x,y),$$

这时按替换公理,$\varphi[a]$也是集.

下面讨论另一种类函数——序数函数. 如果公式 $\psi(x,y)$满足

$$\forall\alpha\in\mathbf{On}\ \exists!\ y\psi(\alpha,y), \tag{2}$$

即每个序数 α 都通过公式ψ 对应于惟一一个集y,那么便说 ψ 是一个序数函数. 说它是一种类函数,是因为它的"定义域"是序数宇宙 **On** 而不是集.

对序数函数 ψ,我们用写 $y=\psi(\alpha)$代替写 $\psi(\alpha,y)$. 如果我们把序数变元 α 限制在由某些序数组成的集a 中,那么有

$$\forall\alpha\in a\ \ \exists!\ y\psi(\alpha,y),$$

这时 ψ 确定了a 上的一个函数,叫做 ψ 在a 上的限制,记作 $\psi\restriction a:a\to\psi[a]$,其值域 $\psi[a]$也是集(按替换公理).

有了上面的准备,我们开始讨论 **On** 上的超限递归定义. 目标是:按需要定义一种序数函数 ψ,使 ψ 对每个序数α 所取的函数值$\psi(\alpha)$依赖于该函数对 $\beta<\alpha$ 的取值;简单说,就是使 $\psi(\alpha)$依赖于 $\psi\restriction\alpha$.

引理 1(惟一性引理) 设 f,g 是分别定义在序数δ,γ 上的函数,$\delta\leqslant\gamma$,

且 φ 是个集运算. 若 f,g 与 φ 满足

$$\forall \alpha<\delta(f(\alpha)=\varphi(f\restriction\alpha)\wedge g(\alpha)=\varphi(g\restriction\alpha)), \tag{3}$$

则 $g\restriction\delta=f$, 即当 $\alpha<\delta$ 时总有 $f(\alpha)=g(\alpha)$.

证　对 $\alpha<\delta$ 归纳. (这是良序集 δ 上的超限归纳, 见 §7.4 定理 1.) $\alpha=0$ 时,

$$f(0)=\varphi(f\restriction 0)=\varphi(0)=\varphi(g\restriction 0)=g(0)$$

归纳假设: $\beta<\alpha$ 时 $f(\beta)=g(\beta)$, 即 $f\restriction\alpha=g\restriction\alpha$.

由归纳假设及条件(3)得

$$f(\alpha)=\varphi(f\restriction\alpha)=\varphi(g\restriction\alpha)=g(\alpha). \qquad \square$$

讨论 **On** 上的递归定义, 关键的一步是把自然数集 ω 上的递归定义推广到一般序数 δ 上的递归定义.

定理 1(序数 δ 上的递归定义)　对任给的集运算 φ, 惟一存在序数 δ 上的函数 ψ_δ 满足:

$$\forall \alpha<\delta \quad \psi_\delta(\alpha)=\varphi(\psi_\delta\restriction\alpha). \tag{4}$$

证　ψ_δ 的惟一性由引理 1 即得. 现对 $\delta\in\mathbf{On}$ 归纳证明满足条件(4)的 ψ_δ 的存在性. $\delta=0$ 时, 取 $\psi_0=0$.

归纳假设: 对每个 $\gamma<\delta$, 存在 γ 上的函数 ψ_γ 满足

$$\psi_\gamma(\alpha)=\varphi(\psi_\gamma\restriction\alpha), \alpha<\gamma. \tag{5}$$

当 δ 为后继序数时, 设 $\delta=\gamma'$. 这时由归纳假设, 已有满足(5)的 ψ_γ 在手, 利用这个 ψ_γ 可定义 ψ_δ 如下:

$$\forall \alpha<\delta \quad \psi_\delta(\alpha)=\varphi(\psi_\gamma\restriction\alpha). \tag{6}$$

现需证 ψ_δ 具有性质(4). 因 $\delta=\gamma'$, 有

$$\alpha<\delta \leftrightarrow \alpha<\gamma \vee \alpha=\gamma,$$

故当 $\beta<\alpha<\delta$ 时, 总有 $\beta<\gamma<\delta$, 于是

$$\begin{aligned}\psi_\gamma(\beta)&=\varphi(\psi_\gamma\restriction\beta) && (\text{由}(5))\\ &=\psi_\delta(\beta). && (\text{由 } \psi_\delta \text{ 的定义式}(6))\end{aligned}$$

这说明 $\psi_\gamma\restriction\alpha=\psi_\delta\restriction\alpha$, 代入(6)式右端便得所需要的(4)式.

当 δ 为极限序数时, 定义 ψ_δ 如下: 对任意 $\alpha<\delta$(此时 $\alpha'<\delta$, 见 §8.2 命题 3), 按归纳假设, 已有满足(5)的 $\psi_{\alpha'}$ 在手, 利用这个 $\psi_{\alpha'}$, 令

$$\psi_\delta(\alpha)=\psi_{\alpha'}(\alpha). \tag{7}$$

于是当 $\beta<\alpha$ 时(注意此时 $\beta'<\alpha'$, 见 §8.2 练习 3), 有

$$\psi_\delta(\beta)=\psi_{\beta'}(\beta)=\psi_{\alpha'}(\beta).$$

后面的等式用了引理 1(按归纳假设, $\psi_{\beta'}$ 与 $\psi_{\alpha'}$ 都具有条件(5)中 ψ_γ 的性质, 故满足引理 1 中的条件(3), 引理 1 中 δ 与 γ 分别取这里的 β' 与 α'). 所得结果说

明

$$\psi_\delta \upharpoonright \alpha = \psi_{\alpha'} \upharpoonright \alpha. \tag{8}$$

最后,

$$\begin{aligned}\psi_\delta(\alpha) &= \psi_{\alpha'}(\alpha) \qquad (\psi_\delta \text{ 的定义式(7)})\\ &= \varphi(\psi_{\alpha'} \upharpoonright \alpha) \quad (\text{由归纳假设})\\ &= \varphi(\psi_\delta \upharpoonright \alpha). \quad (\text{由(8)})\end{aligned}$$

□

定理2 (**On** 上的递归定义) 对任给的集运算 φ,惟一存在序数函数 ψ 满足

$$\psi(\alpha) = \varphi(\psi \upharpoonright \alpha). \tag{9}$$

证 ψ 的惟一性:设 ψ 与 $\bar{\psi}$ 都具有性质(9),则归纳易证

$$\forall \alpha(\psi(\alpha) = \bar{\psi}(\alpha)).$$

ψ 的存在性:

在定理 1 中取 δ 为后继序数 α',则惟一存在 α' 上函数 $\psi_{\alpha'}$ 满足

$$\psi_{\alpha'}(\gamma) = \varphi(\psi_{\alpha'} \upharpoonright \gamma),\ \gamma < \alpha'. \tag{10}$$

现定义序数函数 ψ 如下:

$$\psi(\alpha) = \psi_{\alpha'}(\alpha). \tag{11}$$

这时有

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \varphi(\psi_{\alpha'} \upharpoonright \alpha) \qquad (\text{由(10),(11)})\\ &= \varphi(\psi \upharpoonright \alpha)\end{aligned}$$

上面最后一步用了结论 $\psi \upharpoonright \alpha = \psi_{\alpha'} \upharpoonright \alpha$,此式成立是因为当 $\beta < \alpha$ 时,

$$\begin{aligned}\psi(\beta) &= \psi_{\beta'}(\beta) \qquad (\text{由 11}))\\ &= \psi_{\alpha'}(\beta). \qquad (\text{由引理 1})\end{aligned}$$

这就证明了由(11)定义的 ψ 具有性质(9). □

序数的加法、乘法及指数运算(§8.4 例 1,例 2 及例 3)是 **On** 上递归定义的特例.

§8.5 集的号码库——Hartogs 数

序数有何用? 首先自然是用于编号.

§8.3 定理 1 告诉我们每个良序集都有序型,即都有与之同构的序数.有了序型,该集的每个元素也就都有了编号;用于编号的这些号码就是序型这个序数的所有元素,它们也都是序数.这样,良序集的序型就是该良序集的一种号码库.

一般集，尚不知是否可以在其上建立良序．但人们发现，任何集，只要是集，都可以为它建立一种号码库——一个大小合适的序数，这个序数储存有足够的序数元素（被称之为“号码”）可用来为该集的元素编号．集的 Hartogs 数就是该集的一种号码库．

为比较势，§6.2 中我们用 $b\leqslant a$ 表示存在集 b 到集 a 的单射．$b\leqslant a$ 的直观意思是：b 的元素不比 a 的元素多．把 b 换成序数 β，$\beta\leqslant a$ 的直观意思还有：β 用自己的全部元素给 a 的若干元素编了号．

定义 1（Hartogs 数）　集 a 的 Hartogs 数是一个序数 α，它具有性质：

1°　α 到 a 不存在单射．

2°　α 是最小的，即若 $\beta<\alpha$，则 $\beta\leqslant a$．

设 α 是集 a 的 Hartogs 数．上述定义的性质 1°说明，若用 α 中的号码给集 a 的元素编号，号码不会用完．（用完了，说明 $\alpha\leqslant a$．）性质 2°说明该数大小合适：再小，号码会用完．

思考题 1　*良序集的序型是不是该集的 Hartogs 数？*

为证明集的 Hartogs 数存在，主要工作是建立下面的引理．引理的证明中用到替换公理及 §8.3 的序型定理．

引理 1　对任何集 a，$a^+=\{$序数 $\beta\mid\beta\leqslant a\}$是序数．

证　先假设 a^+是集．因 a^+的元素都是序数，由 §8.1 定理 1 知 a^+是个 $\in_-$ 良序集；同时，a^+还是个可递集，这是因为

$$\begin{aligned}\gamma\in\beta\in a^+ &\to \gamma\in\beta\leqslant a &&(a^+\text{ 的定义})\\ &\to \gamma\subset\beta\leqslant a &&(\beta\text{ 是可递集})\\ &\to \gamma\leqslant a\quad\text{即 }\gamma\in a^+.\end{aligned}$$

上面在 a^+是集的假定之下我们证明了 a^+是序数．问题归结为要证明 a^+是集而不是真类．

（分析：先要研究 a^+的结构．$\beta\leqslant a$ 意味着 β 是 a 的某良序子集的序型，即与 a 的某良序子集同构．a 是一般集，不知 a 上是否有良序或 a 是否可良序．但 a 肯定有可良序的子集（例如 a 的有限子集）．要注意 a 的同一子集有多种良序（例如三元子集上有六种良序）．若 r_1 与 r_2 都是 $b(\subset a)$上的良序，那么 $\langle b,r_1\rangle$与$\langle b,r_2\rangle$是不同的良序结构，它们可能有不同的序型．所有这些序型集中起来，就得到 a^+．）

令 $B=\{(b,r)\mid b\subset a,r$ 是 b 上的良序$\}$，因 $b\in\mathscr{P}(a)$，$r\in\mathscr{P}(a\times a)$，故 B 是作为 $\mathscr{P}(a)\times\mathscr{P}(a\times a)$的子集定义的；按内涵公理，$B$ 是集．

由序型定理（§8.3 定理 1）知 a 的每个良序子集 b 都有序型 β，于是有：

$$\forall(b,r)\in B\ \exists!\beta\langle\beta,\in\rangle\cong\langle b,r\rangle.$$

再由此式及替换公理知$\{\beta|\langle\beta,\in\rangle\cong\langle b,r\rangle, b\subset a, r$ 是b上的良序$\}$是集，而这个集易知就是a^+. □

练习1 证明引理1中的$a^+(=\{\beta|\beta\preccurlyeq a\})=\{\beta|\langle\beta,\in\rangle\cong\langle b,r\rangle, b\subset a, r$ 是b上的良序$\}$.

定理1 每个集a都有Hartogs数，即都有到该集不存在单射的最小的序数，且集a的Hartogs数就是$a^+=\{\beta|\beta\preccurlyeq a\}$.

证 任取集a.记$\alpha=a^+(=\{\beta|\beta\preccurlyeq a\}$，按引理1，$a^+$是序数).$\alpha$就是$a$的Hartogs数，因为$\alpha$具有定义1的两条性质：

1° 不存在α到a的单射(否则$\alpha\in a^+=\alpha$).

2° $\beta<\alpha$时$\beta\preccurlyeq a$(a^+的定义)，即α具有最小性. □

每个集都有号码库——Hartogs数，这一点使人们增强了深入认识超穷世界的信心，并由此产生了希望：让集的Hartogs数来诱导出该集的良序.能否实现这一希望，我们将在下一章详细讨论.

§8.6 正则公理

1917年，D. M. Mirimanoff发现，Zermelo提出的公理系统不能排除一种异常集存在，这种集形成$\in_-$降链：

$$\cdots\in x_{n+1}\in x_n\in\cdots\in x_2\in x_1\in x_0.$$

特殊情况是$x\in x$. $\in_-$降链的存在意味着集的原始组成可以不存在.

为了消除这种异常集，Von Neumann于1925年提出了下面的正则公理：

ZF 8(正则公理 Regularity Axiom) 每个非空集有$\in_-$极小元.即：

$$\forall a\neq\varnothing\ \exists x\in a\ (x\cap a=\varnothing). \tag{1}$$

(1)式中$x\cap a=\varnothing$的意思是：x是a的$\in_-$极小元，即$\forall t\in a\ t\notin x$.

正则公理断言$\in_-$极小元存在，使$\in_-$降链不能出现.特别有：

命题1 $\forall x(x\notin x)$.

证 设$a=\{x\}$.按ZF8，a有$\in_-$极小元，这个极小元就是x.这导致$x\notin x$.(若有$x\in x$，则x不是$\in_-$极小元.)

练习1 证明：1° $\neg\exists x,y(x\in y\wedge y\in x)$,

2° $\neg\exists x,y,z(x\in y\wedge y\in z\wedge z\in x)$.

练习2 设集a满足$\in_-$三分律：$\forall x,y\in a\ (x\in y\vee x=y\vee y\in x)$.证明"$\in$"在$a$上具有可递性：

$$\forall x,y,z\in a(x\in y\in z\rightarrow x\in z).$$

有了正则公理,序数概念变得更简单.按定义(§8.1 定义 1),$\in_-$良序的可递集叫做序数,即满足以下条件的集 α 叫做序数:

1° $\forall x\in\alpha(x\notin x)$ ($\in_-$反自反性)

2° $\forall x,y,z\in\alpha(x\in y\in z\rightarrow x\in z)$ ($\in_-$可递性)

3° $\forall x,y\in\alpha(x\in y\vee x=y\vee y\in x)$ ($\in_-$三分律)

4° α 的任一非空子集有$\in_-$极小元 ($\in_-$良基性)

5° α 是可递集,即 $x\in y\in\alpha\rightarrow x\in\alpha$.

以上条件中,因有了正则公理,条件 4°自动满足;按命题 1,条件 1°也自动满足;按练习 2,条件 3°蕴涵条件 2°.至此,我们可以说:

序数就是满足$\in_-$三分律的可递集.

8.6 附　集宇宙的形象

集宇宙的建造者是人.人们建筑集宇宙,开头一无所有,白手起家.一无所有,面前只有空集.空集是个集,于是便想起用空集$\varnothing$作为建筑材料.以$\varnothing$为元素,从无到有,得到集$\{\varnothing\}$.于是人们面前有了两块建筑材料——$\varnothing$与$\{\varnothing\}$这两个集.以这两个集为元素,便得到集$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.这个新集有四个不同的子集,于是有了更多的建筑材料:$\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\cdots$.

为了把集宇宙看得更清楚,我们求助于序数宇宙 **On**.作为 **On** 上递归定义的又一特例,下面定义了序数函数 v_α:

$$\mathrm{v}_0=0(=\varnothing),$$
$$\mathrm{v}_{\alpha+1}=\mathscr{P}(\mathrm{v}_\alpha),$$
$$\mathrm{v}_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{v}_\beta\quad(\alpha\text{ 为极限序数时}).$$

我们把每个 v_α 的元素都叫做良基集,并把所有良基集构成的类记作 $\mathbf{V}$,

$$\mathbf{V}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}}\mathrm{v}_\alpha.$$

$\mathbf{V}$ 的前几个层次依次是:

$$\mathrm{v}_0=0,$$
$$\mathrm{v}_1=\mathscr{P}(\mathrm{v}_0)=\{0\}=1,$$
$$\mathrm{v}_2=\mathscr{P}(\mathrm{v}_1)=\{0,1\}=2,$$
$$\mathrm{v}_3=\mathscr{P}(\mathrm{v}_2)=\{0,1,\{1\},2\},$$
$$\vdots$$

从 v_3 开始,成员中便出现了非序数集.v_3 中的$\{1\}$就不是序数.上述过程的终结,产生了一个新的层次 v_ω:

$$v_\omega = \bigcup_{n\in\omega} v_n.$$

新层次一个又一个持续产生出来：

$$v_{\omega+1},\cdots,v_{\omega\cdot 2},\cdots,v_{\omega^2},\cdots,v_{\omega^\omega},\cdots.$$

命题1 (i) 每个 v_α 是可递集.

(ii) $\gamma<\alpha \to (v_\gamma \subset v_\alpha \wedge v_\gamma \neq v_\alpha)$(严格递增性).

证 对 α 归纳. $\alpha=0$ 时自然成立.

$\alpha=\beta+1$ 时, $v_\alpha=\mathscr{P}(v_\beta)$. 此时有：

(i) $x\in y\in v_\alpha \to x\in y\subset v_\beta$

$\to x\in v_\beta$

$\to x\subset v_\beta$ (用了归纳假设: v_β 是可递集)

$\to x\in \mathscr{P}(v_\beta)=v_\alpha$;

(ii) $\gamma<\alpha \to \gamma\leqslant\beta$

$\to v_\gamma\subset v_\beta$ (用了归纳假设)

$\to v_\gamma\in \mathscr{P}(v_\beta)=v_\alpha$

$\to v_\gamma\subset v_\alpha$ 且 $v_\gamma\neq v_\alpha$ (已证 v_α 是可递集且因 $v_\alpha\notin v_\alpha$).

α 是极限序数时, $v_\alpha=\bigcup\{v_\gamma \mid \gamma\in\alpha\}$ 且

$$\gamma\in\alpha \to \gamma+1\in\alpha \quad (\S 8.2 \text{ 命题 } 3),$$

此时有：

(i) $x\in y\in v_\alpha \to \exists\gamma\in\alpha\; x\in y\in v_\gamma$

$\to x\in v_\gamma$(按归纳假设, v_γ 是可递集)

$\to x\in v_\alpha$;

(ii) 若 $\gamma<\alpha$, 则由归纳假设知 $v_\gamma\subset v_{\gamma+1}$, 且 $v_\gamma\neq v_{\gamma+1}(\subset v_\alpha)$, 于是 $v_\gamma\subset v_\alpha$ 且 $v_\gamma\neq v_\alpha$. □

由命题 1(ii)知

$$v_0\subset v_1\subset v_2\subset\cdots\subset v_\omega\subset v_{\omega+1}\subset\cdots.$$

一个良基集若在 $\mathbf{V}$ 的某一层出现, 便在后面的所有层都出现. 对给定的良基集 x, $x\in v_\alpha$ 的最小层数 α 一定是个后继序数: $\alpha=\beta+1$. 事实上, α 不会是 0 (因 $v_0=0$); 也不会是极限序数, 否则, 由 v_α 的定义知有更小的 $\beta<\alpha$ 使 $x\in v_\beta$. 每个良基集第一次出现的层次相应于后继序数下标, 这一点使我们可以让每个良基集 x 联系着一个序数, 叫做 x 的秩, 用 $\mathrm{rank}(x)$ 表示:

$$\mathrm{rank}(x)=\text{使 } x\in v_{\beta+1} \text{ 的最小序数 } \beta.$$

也就是说, $\mathrm{rank}(x)$ 是 $x\not\subset v_\beta$ 的最大 β; x 在 $\mathbf{V}$ 中 $v_{\beta+1}$ 这一层最早出现, 并在以后各层都出现. 若记 $\beta=\mathrm{rank}x$, 则有:

$$x \in \mathrm{v}_{\beta+1} \text{但 } x \notin \mathrm{v}_\beta, \tag{1}$$

$$\forall \alpha > \beta \quad x \in \mathrm{v}_\alpha. \tag{2}$$

命题2　$\mathrm{v}_\alpha = \{x \in \mathbf{V} \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$.（$\mathrm{v}_\alpha$ 由所有秩比 α 小的良基集组成.）

证　先设 $\beta = \mathrm{rank}(x) < \alpha$，由(2)可知 $x \in \mathrm{v}_\alpha$.

再设 $x \in \mathrm{v}_\alpha$，这时 $\beta = \mathrm{rank}(x) < \alpha$. 事实上，若 $\beta \geqslant \alpha$，则由(2)知 $x \in \mathrm{v}_\beta$，与(1)矛盾. □

命题3　若集的成员都是良基集，则该集也是良基集：

$$x \subset \mathbf{V} \to x \in \mathbf{V}. \tag{3}$$

证　设 $x \subset \mathrm{V}$. x 的元素都是良基集，故都有秩. 下证 x 也是良基集. 记

$$\alpha = \bigcup \{\mathrm{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}.$$

注意

$$\begin{aligned} y \in x &\to \mathrm{rank}(y) + 1 \subset \alpha \quad (\alpha \text{ 的定义式}) \\ &\to \mathrm{rank}(y) < \alpha \\ &\to y \in \mathrm{v}_\alpha(\text{命题 } 2), \end{aligned}$$

可知 $x \subset \mathrm{v}_\alpha$，$x \in \mathrm{v}_{\alpha+1}(=\mathscr{P}(\mathrm{v}_\alpha))$. 这说明 x 是良基集. □

下面的定理给出了集宇宙的一种表示：集宇宙 $= \mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathrm{v}_\alpha$.

定理1　所有集都是良基集.

证　任取集 a. 作集 b：

$$\begin{aligned} b &= \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup^n a) \\ &= a \cup (\bigcup a) \cup (\bigcup \bigcup a) \cup \cdots \cup (\overbrace{\bigcup \cdots \bigcup}^{n \text{个} \bigcup} a) \cup \cdots, \end{aligned} \tag{4}$$

b 是可递集. 事实上，设 $y \in x \in b$，若 $x \in \bigcup^n a$，则 $y \in \bigcup^{n+1} a$，故 $y \in b$.

下证 b 的元素都是良基集：$b \subset \mathbf{V}$. 反设 b 有非良基集成员. 作

$$c = \{x \in b \mid x \text{ 不是良基集}\} (\neq \varnothing).$$

由正则公理知 c 有 $\in_-$ 极小元，设为 x_0. x_0 作为 c 的成员，不是良基集：

$$x_0 \notin \mathbf{V}. \tag{5}$$

任取 $y \in x_0$，由 x_0 的 $\in_-$ 极小性知 $y \notin c$. 但因 b 是可递集，故 $y \in b$. y 必是良基集，否则 $y \in c$. 这说明 x_0 的元素都是良基集：$x_0 \subset \mathbf{V}$. 由(3)得 $x_0 \in \mathbf{V}$，与(5)矛盾. 至此证明了 $b \subset \mathbf{V}$. 由此及(4)知 $a \subset \mathbf{V}$. 最后再由(3)知 a 是良基集：$a \in \mathbf{V}$. □

定理 1 的证明中用到了正则公理.

我们以 ZF 理论的眼光来观察集宇宙，发现它是由良基集组成的. 在 ZF 系统的框架内，集论的论域被限制于良基集类. 这样，由空集开始反复用通常

的集运算便可得到一切集.

良基集类为通常数学提供了足够大的舞台.事实上,通常数学的活动范围只占据了这个舞台的很小一部分.

第九章　选择公理

前几章中已多次提到选择公理及其变形或应用(参见 3.5.3 附,4.1.3,4.4.1,5.4 附及 §6.5 等).本章集中讨论这一公理的几种重要等价形式以及若干重要应用.

添加选择公理(AC)后的 ZF 公理系统记作 ZFC.现将 ZFC 的公理集中起来列出如下:

ZF1(外延公理)　$\forall x(x\in a \leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b$.

ZF2(内涵公理)　$\forall s\exists y(y=\{x\in s\mid p(x)\})$,$p(x)$是集 x 的性质.

ZF3(无序对公理)　$\forall a,b\exists y(y=\{a,b\})$.

ZF4(并集公理)　$\forall a\exists y(y=\bigcup a)$,其中$\bigcup a=\{x\mid \exists t\in a(x\in t)\}$.

ZF5(幂集公理)　$\forall a\exists y(y=\mathscr{P}(a))$,其中 $\mathscr{P}(a)=\{x\mid x\subset a\}$.

ZF6(无限公理)　$\exists s(\varnothing\in s\wedge\forall x(x\in s\rightarrow x'\in s))$,其中 $x'=x\bigcup\{x\}$.

ZF7(替换公理)　设集 a 与关于集 x,y 的性质 $\varphi(x,y)$ 满足 $\forall x\in a\ \exists!\ y\varphi(x,y)$,则$\{y\mid \exists x\in a\varphi(x,y)\}$也是集.

ZF8(正则公理)　每个非空集有$\in_-$极小元.

AC(选择公理)　设 a 是由非空集组成的集族,则存在以 a 为定义域的函数 f 满足

$$\forall x\in a(f(x)\in x)(f\text{ 叫做}a\text{ 上的选择函数}).$$

§9.1　选择公理的特殊性

上面列出的 ZFC 系统中的选择公理(AC)是 Zermelo 于 1908 年与他的其他公理一道提出的. 1904 年他曾对该公理提出过类似的表述. 在这之前,Cantor 曾在他的著作中把该公理作为显然的事实使用过. Peano, B. Levi 等人也曾注意到这条公理在数学研究中的作用. 1906 年,Russell 还给出了该公理的一种等价形式.

“选择公理(和连续统假设一起)可能是继欧几里得平行公理之后,大家最感兴趣也是数学界讨论最多的公理.”[80]在选择公理出现后的一段时间内,数学家对它存在较大争议.

为认识选择公理的特殊性,需要再深入地理解该公理的涵义.

注意恒真式

$$x \neq \varnothing \leftrightarrow \exists t(t \in x),$$

从一个非空集里选出一个元素来,是没有疑问的.进一步.设 $x_1 \neq \varnothing$ 且 $x_2 \neq \varnothing$,则易知 $x_1 \times x_2 \neq \varnothing$.(取 $t_1 \in x_1, t_2 \in x_2$,则 $(t_1, t_2) \in x_1 \times x_2$.)换句话说,$\{(x_1, t_1), (x_2, t_2)\}$ 是 $\{x_1, x_2\}$ 上的选择函数,它的存在也是没有疑问的.利用归纳法立即可证:

若 $x_1 \neq \varnothing, \cdots, x_n \neq \varnothing$,则 $x_1 \times \cdots \times x_n \neq \varnothing$.

$x_1 \times \cdots \times x_n$ 的成员对应着集族 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上的选择函数,它的存在(不管 n 有多大)都是没有疑问的.

再前进一步,考察由无限个非空集组成的集族,情况就不同了.现设 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 皆非空集.直观上看,下面定义的集也是个非空集:

$$\begin{aligned}\Pi_{n \in \omega} x_n &= x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n \times \cdots \\ &= \{f \mid f: \omega \to \bigcup_{n \in \omega} x_n, f(n) \in x_n\}.\end{aligned}$$

$\Pi_{n \in \omega} x_n$ 的成员 f 相当于集族 $\{x_n \mid n \in \omega\}$ 上的选择函数,还相应于一个无限序列:

$$t_0, t_1, \cdots, t_n, \cdots (t_n \in x_n (f(n) = t_n)). \tag{1}$$

已知每个 $x_n \neq \varnothing$ 便断言 $\Pi_{n \in \omega} x_n \neq \varnothing$,即断言族 $\{x_n \mid n \in \omega\}$ 上的选择函数存在或断言序列(1)存在,没有选择公理,有什么根据呢?这里谈的是集的可数族.实际上,数学中还会遇到集的不可数族,例如考察实数集的全体子集形成的集族,其上选择函数的存在性也依赖于选择公理.

现在我们看到,选择公理对由非空集组成的集族断言其上的选择函数存在,是对同时进行无限次选择的可能性的肯定,这里的选择是带有随意性的选择.

为要清楚理解选择公理的特殊性,应特别注意选择公理所允许的无限次同时选择是带随意性的选择.否则,即使是无限次选择,也可以不用选择公理.例如,如果集族 a 是由无限个独元集组成的集族,即 a 满足

$$\forall x \in a \exists ! y (y \in x), \tag{2}$$

那么 a 上的选择函数 f 是完全确定的;f 的函数值取为独元集的独元,不带任何随意性,从而 f 的存在性可不用选择公理来证明.这时由内涵公理便知 f 的存在:

$$f = \{(x, y) \in a \times \bigcup a \mid y \in x\}.$$

(条件(2)保证了 f 是个函数,性质 $y \in x (x \in a)$ 保证了 f 是 a 上的选择函数.)但是,如果集族 a 的无限个成员都不是独元集,而同时从 a 的所有成员

集的每一个集里选出一个元素时又不能避免随意性，那么只能求助于选择公理来得到 a 上的一个选择函数. 对此，Russell 曾有一个形象的说明：从无限双鞋子中同时选出一只鞋，无须选择公理（例如，从每双鞋中取出左脚鞋，这一指令是明确的，选择函数当然是合理定义了的）；但从无限双袜子中同时选出一只袜子，即避免不了随意性，要用选择公理.

思考题 1　能否不用选择公理证明自然数集 $\mathbf{N}$ 的非空子集族 $\mathscr{P}(\mathbf{N})-\{\varnothing\}$ 上存在选择函数 f？（$\forall x\in\mathscr{P}(\mathbf{N})-\{\varnothing\}(f(x)\in x)$.）把 $\mathbf{N}$ 换成一般集 a，结论如何？

思考题 2　不用选择公理证明：若集 a 与公式 $\varphi(x,y)$ 满足

$$\forall x\in a\,\exists!\,y\in x\varphi(x,y),$$

则存在 a 上的选择函数.

以上讨论说明，选择公理的特点是：没有给出具体构造方法而断言集族上选择函数存在. 这给数学论证带来很大方便，但也因非构造性的特点为它带来了争议.（回忆直觉主义的口号："存在等于可构造".）

下面的练习是选择公理在数学分析中的应用例.

练习 1　设 $f(x)$ 在 a 点附近有定义. 证明：若每当数列 $x_n\to a$ 时 $f(x_n)\to f(a)$，则 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$（即 f 在 a 点连续）.

选择公理有许多等价形式. 下面列出的几种形式只不过是说法不同而已.

AC1　集的任何分类都存在代表集（即从每个等价类中选出一个代表元素放在一起构成的集，参见 4.1.3）.

AC2（单值化原则）　设 $r\subset a\times b$ 且 $\mathrm{Dom}(r)=a$，则存在集 a 到 b 的函数 $f\subset r$（参见 3.5.3 附）.

AC3（单射原则）　任意函数包含有同一值域的单射.（与 AC2 对称.）

AC4（乘积定理）　$\forall i\in I(a_i\neq\varnothing)\to\Pi_{i\in I}a_i\neq\varnothing$，其中 $\Pi_{i\in I}a_i=\{f\mid f:I\to\bigcup_{i\in I}a_i, f(i)\in a_i\}$.

§9.2　良序原理

良序集有许多好性质，其中较重要的有：

1. 归纳法可由自然数集推广到良序集（见 §7.3），
2. 良序集相互间可比长短（见 §7.3 定理 2），
3. 良序集都有序型（即与之同构的序数），从而其元素都有编号（见 §8.3 定理 1）.

Cantor 相信：任何集皆可良序. 在 Hilbert 有名的 1900 问题表中，第一问

题(连续统问题)的后一半是[81]:

现在提出的问题是:实数全体是否可以按其他方式排列,使得每个部分集合都有一个首元素,也就是说,连续统是否能够被看作良序集——康托尔认为这问题的答案是肯定的.我感到迫切需要的是对康托尔这一值得注意的命题作出直接的证明……

读者可尝试思考一下(建议只用 3～5 分钟):如何在实数集 **R** 上具体建立一个良序(当然,与原序不同)?

凡集皆可良序——这是一个诱人的命题,成立与否,事关重大;它若成立,超穷世界一片光明.1904 年,Zermelo 给出了这一命题的一个证明,于是建立了下面的良序原理.

定理 1(良序原理) 任何集上皆存在良序.

在证明良序原理之前,先作如下分析.

任取集 a.目标:建立 a 上良序.方法:用序数给 a 的元素一一编号,一个不漏.为此,先要为 a 建一号码库,要求库中用于给 a 的元素编号的序数是用不完的.这个号码库已由 §8.5 定理 1 准备好了,那就是集 a 的 Hartogs 数 a^+:

$$a^+ = \{\beta \mid \beta \preccurlyeq a\}.(\beta \preccurlyeq a \text{ 指存在序数} \beta \text{ 到} a \text{ 的单射,见 §6.2.})$$

a^+ 是个序数,且它到 a 不存在单射.(a^+ 到 a 不存在单射,意味着 a^+ 中序数号码用不完;用完了,就有 $a^+ \preccurlyeq a$.)有了号码库 a^+,便可着手建立编号函数 $g: a^+ \to a$ 如下.令

$g(0) = t_0 \in a$,(意为从 a 中取出 t_0,给 t_0 的编号是 0,以下类似.)

$g(1) = t_1 \in a - \{t_0\} = a - g[1](g[1] = \{g(0)\})$,

$g(2) = t_2 \in a - \{t_0, t_1\} = a - g[2](g[2] = \{g(0), g(1)\})$,

⋮

$g(\gamma) = t_\gamma \in a - g[\gamma]$

($g[\gamma]$ 指在第 γ 步之前已用比 γ 小的序数编过号的 a 中元素之集),

⋮

这样下去,a 的元素必被抽尽.设到了第 γ_0 步 a 被抽空:$a - g[\gamma_0] = 0$;这时 a 的元素都有了号码,编号过程便告结束,a 自然成了良序集.但这时 a^+ 中的号码必尚未用完(因 a^+ 到 a 不存在单射).对未被用上的 $\gamma \in a^+$,让 $g(\gamma)$ 全都等于某个固定的不在 a 中的元素便可.

从以上分析可以看出,整个编号过程(即 g 的递归定义过程)的每一步(如第 γ 步)都要从 a 中尚未编号的那些元素中,即从 $a - g[\gamma]$ 中随意选出一

个元素来,用 γ 给它编上号;而对无限集 a,以上编号过程是个超穷过程,为完成 g 的定义,必须要用选择公理.

良序原理的证明

任给集 a,用选择公理,可取 $\mathscr{P}(a)-\{0\}$ 的选择函数 f,它满足

$$f(x)\in x. \tag{1}$$

令 $\alpha=a^{+}$(a 的 Hartogs 数),则有

$$\alpha \not\preccurlyeq a. \tag{2}$$

任取 $s_0\notin a$.利用已有的满足(1)的选择函数 f,可递归定义 α 上的函数 g 如下.对 $\gamma\in\alpha$,令

$$g(r)=\begin{cases}f(a-g[r]), & 若\ a-g[\gamma]\neq 0,\\ s_0, & 若\ a-g[\gamma]=0,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $g[\gamma]=\{g(\beta)\mid\beta<\gamma\}$.当 $a-g[\gamma]\neq 0$ 时,由(1),(3)知

$$g(\gamma)\in a-g[\gamma]. \tag{4}$$

当 $a-g[\gamma]=0$ 时(即已用 f 抽尽了 a 中元素后),$g(\gamma)=s_0$.

令 γ_0 是使 $a-g[\gamma]=0$ 的最小 γ.这时 $a=g[\gamma_0]$.于是 g 用序数 γ_0 中的良序"$\in$"诱导出 a 中的良序.γ_0 一定会出现.若 γ_0 始终不出现,则由(3)知

$$\forall\gamma\in\alpha\quad g(\gamma)=f(a-g[\gamma]),$$

这说明 $\alpha\preccurlyeq a$,与(2)矛盾(注意 $\beta<\gamma$ 时,$g(\beta)\in g[\gamma]$,由(4)知 $g(\beta)\neq g(\gamma)$). □

用 WO 表示"凡集皆可良序"这一命题,则定理 1 应写成

定理 1 AC→WO.

反过来,由良序原理也可推出选择公理.

定理 2 WO→AC.

证 设 a 是由非空集组成的集族.为得到 a 上的选择函数,利用 WO,在集 $\bigcup a$ 上建立一个良序,然后定义 a 上的选择函数 f 如下.对任一 $x\in a$,有 $x\subset\bigcup a$;因 $x\neq 0$,可令

$$f(x)=x\ 的最小元. \qquad □$$

现在可以证明集族不交化命题(参见 7.3 附):任意集族 $A=\{a_i\mid i\in I\}$ 都可"不交化",即存在集族 $B=\{b_i\mid i\in I\}$(被称作 A 的不交族)满足:

1° $\forall i\in I\ b_i\subset a_i$.

2° $\bigcup_{i\in I}b_i=\bigcup_{i\in I}a_i$.

3° B 的所有成员互不相交,即 $i\neq j$ 时 $b_i\cap b_j=0$.

这只要用良序原理先将任意指标集 I 良序化,然后用 7.3 附的命题 1 便可.

建立了选择公理与良序原理的等价性之后,我们认识到:选择公理的实

质,是对人类在超穷世界里建立秩序的能力的积极肯定.在 ZF 集论系统里加入选择公理,相当于把集论的论域明确限制于可良序集的类.

定理 3 良序原理等价于势可比较原理:任意二集 a, b 皆有

$$a \leqslant b \vee b \leqslant a.$$

练习 1 证明定理 3.

练习 2 用良序原理证明任一无限集都包含可数无限子集,进而证明任一无限集都能与自己的某个真子集等势.

§9.3 Zorn 引理

选择公理最重要的等价形式,除了良序原理,便是 Zorn 引理;该引理的应用十分广泛,它出现在数学的各个重要分支.

偏序结构是广泛存在的数学结构.Zorn 引理所断言的是某种偏序集的极大元的存在性.

Zorn 引理 若非空偏序集 a 的每个全序子集(链)在 a 中都有上界,则 a 必有极大元.

先回忆上界与极大元的定义.偏序集 a 的全序子集 b 在 a 中有上界,意为

$$\exists x \in a \, \forall y \in b \, (y \leqslant x).$$

t 是偏序集 a 的极大元,指

$$t \in a \wedge \forall x \in a \, (t \nless x).$$

注意 a 的子集 b 的上界可以在 b 中,也可以不在 b 中.我们知道,一般偏序集可能没有极大元.但若全序子集皆在该集中有上界,则情况不同.

在用选择公理证明 Zorn 引理之前,先作如下分析.

已知偏序集 a 的任一全序子集在 a 中有上界.为寻找 a 的极大元,我们由 a 的某个元素 x_0 出发,取出 a 的递增序列:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\gamma < \cdots,$$

序列中元素的编号由 a 的号码库 a^+(a 的 Hartogs 数)提供.每一步取出的元素只要取得比在它之前已取出的元素更大便可,即只须在已取元素的严格上界的集中选取.换一种说法,上述过程相应于建立下面的映射 $g: a^+ \to a$,使

$$g(0) = x_0 \quad (x_0 \text{ 在 } a \text{ 中任取}),$$

$$g(1) = x_1 \quad (x_1 \text{ 在比 } x_0 \text{ 大的元素中任取}),$$

$$g(2) = x_2 \quad (x_2 \text{ 在 } \{x_0, x_1\} \text{ 的严格上界的集里任取}),$$

$$\vdots$$

$$g(\gamma) = x_\gamma \quad (x_\gamma \text{ 在 } g[\gamma] \text{ 的严格上界的集里任取}),$$

$$\vdots$$

若某步取到了极大元，则止步；若未达极大元，则过程继续，直至终结. a^+ 的性质(a^+ 到 a 不存在单射)保证了上述过程必有终结，而过程最后选出的全序子集的上界就是 a 的极大元. 因过程中的每步选取都带有随意性，故要用选择公理才行.

上面的分析使我们得到下面定理 1.

定理 1　AC → Zorn 引理.

证　设非空偏序集 a 的每个全序子集在 a 中有上界. 为找出 a 的极大元，利用选择公理，先作出 $\mathscr{P}(a) - \{0\}$ 的选择函数 f，它满足

$$f(x) \in x. \tag{1}$$

令 $\alpha = a^+$（a 的 Hartogs 数），则有

$$\alpha \not\preccurlyeq a. \tag{2}$$

任取 $s_0 \notin a$. 利用已有的满足(1)的函数 f 可递归定义 α 上的函数 g 如下. 对 $\gamma < \alpha$，令

$$g(\gamma) = \begin{cases} f(g[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中的严格上界的集}), & \text{若 } g[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中有严格上界}, \\ s_0, & \text{若 } g[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中无严格上界}, \end{cases}$$

x 是 $g[\gamma] = \{g(\beta) \mid \beta < \gamma\}$ 的严格上界，指每个 $\beta < \gamma$ 都使 $g(\beta) < x$.

一定存在 $\gamma < \alpha$ 使 $g[\gamma]$ 在 a 中不再有严格上界. 如果这样的 γ 不存在，那么由 g 的定义及(1)知对所有 $\gamma < \alpha$，$g(\gamma)$ 是 $g[\gamma]$ 在 a 中的某个严格上界(由选择函数 f 选出). 这说明严格递增函数 g 是 α 到 a 的单射，即 $\alpha \preccurlyeq a$，这与(2)矛盾.

既然存在 $\gamma < \alpha$ 使 $g[\gamma]$ 在 a 中无严格上界，我们把这种 γ 的最小者记为 γ_0；这时，作为 a 的全序子集，$g[\gamma_0]$ 在 a 中的(非严格的)上界就是 a 的极大元.(按已知条件，a 的全序子集在 a 中有上界.)　□

作为 Zorn 引理的应用例，我们用 Zorn 引理来证明有用的 Tukey 引理.

Tukey 引理　设非空集 a 具有性质：

$$x \in a \leftrightarrow x \text{ 的所有有限子集都属于 } a, \tag{3}$$

则 a 按"$\subset$"有极大元.

性质(3)常被称作"有限特征".

定理 2　Zorn 引理 → Tukey 引理.

证　设非空集 a 具有性质(3). 易知 a 按"$\subset$"成非空偏序集. 任取 a 的全序子集 b. 根据并集的性质：

$$x \in b \rightarrow x \subset \bigcup b,$$

$\bigcup b$ 是 b 的上界. 只要证明 $\bigcup b\in a$,便立即由 Zorn 引理知 a 有 $\subset$ 极大元.

为证 $\bigcup b\in a$,利用(3),要证 $\bigcup b$ 的有限子集都属于 a. 事实上,因 b 是 $\subset$ 全序子集,故 $\bigcup b$ 的任一有限子集必是 b 的某个元素 x 的有限子集,(由(3)及 $x\in a$ 知)也必属于 a. □

作为 Tukey 引理的应用例,我们用它来证明选择公理.

定理 3 Tukey 引理 → AC.

证 设 a 是由非空集组成的集族,我们要证存在 a 的选择函数. 为此,作

$$b=\{g\mid g \text{ 是 } a \text{ 的某个子族的选择函数}\}.$$

简单的验证便知 b 具有性质

$$g\in b\leftrightarrow g \text{ 的任一有限子集都属于 } b.$$

$b\neq\varnothing$(例如,a 的独元子族自然有选择函数). 由 Tukey 引理知 b 按"$\subset$"有极大元 f. 剩下要证 $\mathrm{Dom}(f)=a$,从而 f 是 a 的选择函数. 反设存在 $x\in a-\mathrm{Dom}(f)$. 因 $x\neq\varnothing$,故可取 $y\in x$ 使 $f\cup\{(x,y)\}\in b$,从而与 f 的极大性矛盾. □

以上三个定理的循环论证,让我们见到事实:

选择公理(AC) ↔ Zorn 引理 ↔ Tukey 引理.

从另一角度来看选择公理,它不过是让我们肯定某种极大元的存在性. 为加深这种印象,让我们来看选择公理的又一重要等价命题:

Hausdorff 极大原理 偏序集的任一链(全序子集)皆可扩张成极大链. (偏序集 a 的链 b 为极大,指 a 中不存在更大的链 $c\supset b$.)

定理 4(Zorn 引理 ↔ Hausdorff 极大原理).

证 (→)设 b 为偏序集 a 中的链. 为用 Zorn 引理证明 b 的极大扩张的存在性,作

$$P=\{c\supset b\mid c \text{ 为 } a \text{ 中链}\}.\ (P\neq\varnothing,\text{例如 } b\in P.)$$

$\langle P,\subset\rangle$ 是偏序结构(不同于原偏序结构 $\langle a,<\rangle$),P 的极大元若有,便是所求的 b 的极大扩张.

任取 P 中链 p. $p=\varnothing$ 时,P 中任何元素都是 p 的上界. $p\neq\varnothing$ 时由并集性质知 $\bigcup p$ 是链 p 的上界:

$$x\in p\rightarrow x\subset\bigcup p. \tag{4}$$

因 p 是 P 中链,故 $\bigcup p$ 是 a 中链,且 $\bigcup p\supset b$(由(4)及 P 的定义即知). 这说明 $\bigcup p\in P$,从而可由 Zorn 引理断言 P 的极大元存在.

(←)设非空偏序集 a 的任一链在 a 中有上界. 现利用 Hausdorff 极大原理将 a 中某个链(例如 $\varnothing$)扩张成为 a 的极大链 b. 设 x 是 b 在 a 中的上界,则 x 就是 a 的极大元. 事实上,反设 x 不是极大元,则有 $y\in a$ 使 $x<y$,于是

$b\cup\{y\}$也成了 a 中链,这与 b 的极大性矛盾. □

练习 1 直接用 Zorn 引理证明选择公理(AC).

练习 2 (Tukey 引理的重要应用例)任何向量空间都有基底(向量空间概念可参见线性代数教科书).

至此,我们已得到选择公理(AC)的如下等价形式:

AC1 (等价类的代表集的存在性).

AC2 (单值化原则).

AC3 (单射原则).

AC4 (乘积定理).

WO (良序原理).

势可比较原理.

Zorn 引理.

Tukey 引理.

Hausdorff 极大原理.

§9.4 选择公理的地位及应用例(滤子扩张原则)

1938 年,Gödel 证明了 ZFC 相对于 ZF 的无矛盾性:若 ZF 无矛盾,则添加选择公理后的 ZFC 也无矛盾.这一重要结论告诉人们,使用选择公理是相对安全的.这是使选择公理在经过激烈争论之后得到普遍承认的重要原因之一.

1924 年,Banach 与 Tarski 证明了分球定理,该定理利用选择公理做成了这样一件奇事:一个球被剖分成若干部分后经重新安排竟能变成两个与原球尺寸相同的球.这一奇论在一段时间内引起了对选择公理的怀疑.但在实际上,该定理的结论虽与人们关于"测度"的直觉相悖,却并不导致任何数学悖论,更不可能把一个金球变成大小和重量与原来金球一样的两个金球.[82]

下面的例子告诉我们:原本不用选择公理可以证明的一些结论,若使用选择公理,则证明大为简化.

例 1 设 a 为无限集.用$[a]^2$ 表示 a 的元素的无序对的全体(a^2 是 a 的元素的有序对的集).用选择公理立即可得下面的结论:

若存在单射 $f:a^2\to a$,*则存在单射* $g:[a]^2\to a$. (1)

事实上,将 $g(\{x,y\})$,取为 $f(x,y)$与 $f(y,x)$二者中的任一个便得到所需要的单射 g.

例 1 中结论(1)的成立实际上并不需要选择公理.但不用选择公理,该命题的证明可不是那么简单、直接.[83]可尝试思考一下(不必用过多时间):能否

找到不用选择公理证明结论(1)的简单方法?

选择公理具有相对于 ZF 的无矛盾性,并不是人们普遍接受它的最重要的原因.同是 1938 年,Gödel 证明了连续统假设相对于 ZF 也是无矛盾的;但连续统假设与选择公理的地位并不一样:人们一般不把该假设作为公理使用.

有利于选择公理的更重要的因素是:现代数学的各个分支都很难离开选择公理.拒绝选择公理,拓扑学则失去了重要的 Тихонов 定理,代数学则要面对无基底的向量空间,泛函分析则证不出 Hahn-Banach 定理,甚至"实数集 **R** 是它可数个可数子集的并"也并非错话……没有选择公理,对集论本身的影响就更大了.例如,丢掉选择公理,表示集中元素多少的势,竟不一定能比大小.(见§9.2 定理 3.)

关于用其他公理(例如决定公理)代替选择公理的研究,可参见[82]第 9 章.

作为选择公理在数学中的一个重要典型应用,下面就一般集上的滤子概念来建立滤子扩张原则.(关于 **N** 上滤子的概念见 4.4.1.)

滤子概念是集论中初等而重要的概念.若集 a 的子集族 $F(\subset\mathscr{P}(a))$ 满足下面的条件 1°,2°,3°,则叫做 a 上滤子:

1° $\varnothing\notin F, a\in F$.

2° 若 $b,c\in F$,则 $b\cap c\in F$.

3° 若 $b\subset c\subset a$ 且 $b\in F$,则 $c\in F$.

若 a 上滤子 F 又满足下面的条件 4°,则叫做 a 上超滤:

4° $\forall b\subset a\ (b\in F\vee(a-b)\in F)$.

若 a 上超滤 F 还满足下面的条件 5°,则叫做 a 上自由超滤或非主超滤:

5° a 的有限子集 $\notin F$.

例 2 设 a 是无限集.a 的子集族 $F_\sigma=\{b\subset a\mid a-b$ 是有限集$\}$ 是 a 上滤子,满足条件 1°,2°,3°.

例 3 任取 $x_0\in a$,则 a 的子集族 $F_{x_0}=\{b\subset a\mid x_0\in b\}$ 满足条件 1°~4°,故是 a 上超滤.因 $\{x_0\}\in F_{x_0}$,故 F_{x_0} 不满足条件 5°.F_{x_0} 叫做 a 上主超滤.

超滤具有极大性:设 F 是 a 上超滤,则不存在 a 上更大的超滤 $G\supset F$.事实上,反设有这样的 G,则存在 $b\in G-F$,这时 $b\notin F$;b 与 $a-b$ 同时在 G 中,导致 $\varnothing=b\cap(a-b)\in G$,与条件 1°矛盾.

滤子扩张原则 设 F_0 是 a 上滤子,则存在 a 上超滤 $F\supset F_0$.

定理 1 Zorn 引理 → 滤子扩张原则.

证 设 F_0 是 a 上某个滤子.按运用 Zorn 引理的一般程序,需要找一个合适的偏序集.作

$$P = \{G \supset F_0 \mid G \text{ 是 } a \text{ 上滤子}\}.$$

现需要证明 P 有极大元. 为了对偏序结构 $\langle P, \subset \rangle$ 利用 Zorn 引理, 任取 P 的链 L, 证明 L 在 P 中有上界.

$L = \varnothing$ 时, P 中任何元素(例如 F_0)都是 L 的上界.

$L \neq \varnothing$ 时, L 在 P 中的上界就是 $\bigcup L$, 证明如下. (注意 L 中元素都是 a 上滤子.)

首先, $\bigcup L$ 是滤子:

1° $\varnothing \notin \bigcup L$ 而 $a \in \bigcup L$, 这是因为 L 的任一成员 G 都是滤子, 都有 $\varnothing \notin G$ 而 $a \in G$.

2° 设 $b, c \in \bigcup L$, 则有 $G_1, G_2 \in L$ 使 $b \in G_1, c \in G_2$. 因 L 是链, 不妨设 $G_1 \subset G_2$; 这时有 $b, c \in G_2$, $b \cap c \in G_2$, 进而 $b \cap c \in \bigcup L$.

3° 设 $b \subset c \subset a$ 且 $b \in \bigcup L$, 则有 $G \in L$ 使 $b \in G$; 因 G 是滤子, 故 $c \in G$, 进而 $c \in \bigcup L$.

既然 $\bigcup L$ 是滤子, 且 $\bigcup L \supset F_0$(由 P 的定义知 L 的成员都以 F_0 为子集), 说明 $\bigcup L \in P$. 再注意

$$G \in L \to G \subset \bigcup L \quad (\text{并集性质}),$$

便知 $\bigcup L$ 是 L 在 P 中上界. 至此可按 Zorn 引理断言 P 存在极大元. 设 P 的某个极大元是 F, 则极大滤子 $F(\supset F_0)$ 即为所求的超滤, 其根据是下面的命题 1. □

命题 1　若 a 上的滤子 F 是极大滤子, 则一定是 a 上超滤:

$$\forall b \subset a \ (b \in F \lor (a - b) \in F). \tag{2}$$

证　滤子 F 是 a 上极大滤子, 指不存在 a 上滤子 $G \supset F$ 且 $G \neq F$. 为证明 (2)成立, 设 $b \subset a$ 且 $b \notin F$, 只要证明 $a - b \in F$ 便可. 令

$$G = \{x \subset a \mid b \cup x \in F\}.$$

G 是 a 上滤子:

1° $\varnothing \notin G$ $(b \cup \varnothing \notin F)$, $a \in G$ $(b \cup a (= a) \in F)$;

2° 设 $x, y \in G$, 即 $b \cup x \in F$ 且 $b \cup y \in F$, 这时有 $x \cap y \in G$, 因为

$$b \cup (x \cap y) = (b \cup x) \cap (b \cup y) \in F;$$

3° 设 $x \in G$ 且 $x \subset y \subset a$, 则 $y \in G$, 因为

$$b \cup y (\supset b \cup x) \in F.$$

既然 G 是 a 上滤子, 且 $G \supset F$(每当 $x \in F$ 时 $b \cup x \in F$, 故也有 $x \in G$), 由 F 的极大性得 $G = F$. 最后, 易见 $a - b \in F$(因 $b \cup (a - b) = a \in F$, 故 $a - b \in (G =) F$). □

集 a 的子集族 G 具有"有限交性质",是指 G 中任意(个数$\geqslant 1$ 的)有限个成员的交都不是空集.

由滤子的性质 1°与 2°知任何滤子都具有限交性质.反之,具有有限交性质的 a 的子集族不一定是滤子,但总可以扩张成为 a 上滤子;这只要把族中任意有限个元素的非空交,连同比这些非空交更大的(a 的)子集全部放在一起,便形成一个滤子.

命题 2 设集 a 的子集族 G 具有有限交性质:

$$\forall a_1,\cdots,a_n \in G\ (a_1 \cap \cdots \cap a_n \neq \varnothing),$$

则存在 a 上滤子 $F \supset G$.

证 记 $F=\{x \subset a \mid \exists a_1,\cdots,a_n \in G(x \supset a_1 \cap \cdots \cap a_n)\}$.易知 $F \supset G$:

$$x \in G \to x \in F,$$

且容易验证 F 是滤子.以滤子条件 2°为例:设 $x,y \in F$,这时有 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m \in G$ 使

$$x \supset a_1 \cap \cdots \cap a_n, \quad y \supset b_1 \cap \cdots \cap b_m,$$

于是 $x \cap y \supset a_1 \cap \cdots \cap a_n \cap b_1 \cap \cdots \cap b_m$,从而 $x \cap y \in F$. □

有了命题 2,滤子扩张原则现有下面更一般的形式(它仍是选择公理的推论).

滤子扩张原则 设 a 的子集族 G 具有有限交性质:

$$\forall a_1,\cdots,a_n \in G(a_1 \cap \cdots \cap a_n \neq \varnothing),$$

则存在 a 上超滤 $F \supset G$.

第十章　基　　数

集论中,基数理论是建立在精巧的序数理论基础上的.基数被定义为一种特殊的序数,并有自己的算术运算规则.有了基数概念,第六章中势的概念便可在 ZFC 系统内精确化,具体化.

§10.1　基 数 概 念

日常用语中,基数是指"用于表示事物个数的数"[84]或"作为计算标准的数目"[85],用于计数的基数与用于编号的序数在概念上是不同的.对于有限集,自然数既可用于表示次序,又可用于计数;但一进入超穷世界,情况则比较复杂.第六章中曾讨论了势的比较,即集间大小的比较.但究竟如何计数,该章并未涉及.既然自然数这样的有限序数能用于计数,那么自然要问:超穷序数能否用于计数? 考察一下已见过的超穷序数不难发现,并非所有序数都适合作为计数标准,例如,$\omega+1,\omega+2$ 等序数就不适合,因为:

$$\omega<\omega+1<\omega+2,$$

但却有

$$\omega\approx\omega+1\approx\omega+2.$$

人们最终选择了一种特殊的序数作为计数的标准,那就是相互等势的序数中的最小者.

定义 1(基数(cardinal))　序数 κ 叫做基数,如果它满足

$$\forall\alpha<\kappa(\alpha\not\approx\kappa).$$

基数既是一种序数($\in_-$ 良序的可递集),就具有序数的全部性质;例如基数之间也是用$\in$比较大小的($<$与$\in$通用),由基数组成的集是$\in_-$ 良序集,等等.基数有别于其他序数,它与比它小的序数不等势,所以又被称作起始序数(initial ordinal).

$\omega+1$ 不是基数,因为它与比它小的 ω 等势.同样,$\omega+2$ 与 $\omega+3$ 等都不是基数.

命题 1　自然数是基数.

证　设 $n\in\omega$.为证 n 是基数,任取 $\alpha<n$(当然 $\alpha\neq n$).因 n 是可递集,故由 $\alpha\in n$ 知 $\alpha\subset n$,这说明 α 是 n 的真子集.由鸽笼原理(3.6.3 命题 1)知 α

$\not\approx n$. □

命题 2 ω 是基数.

证 任取 $n<\omega$. 为证 $n\not\approx\omega$,反设 $n\approx\omega$;这时由 $n\subset n+1\subset\omega$ 及 §6.3 引理 1 知 $n+1\approx n$,与鸽笼原理矛盾. □

ω 作为基数出现时常写成 ω_0 或 $\aleph_0$.

我们希望有比 ω 更大的基数. 但 $\omega+1,\omega+2$ 以至所有 $\omega+n(n\in\omega)$ 都不是基数.

练习 1 证明 $\omega\cdot 2(=\omega+\omega)$ 不是基数.

练习 2 证明 $\omega^2(=\omega\cdot\omega)$ 不是基数.

有没有比 ω 更大的基数? 下面的关键命题对此作了肯定的回答.

命题 3 任意集 a 的 Hartogs 数 $a^+=\{\beta|\beta\preccurlyeq a\}$ 是基数.

证 由 §8.5 引理 1 知 a^+ 是序数. 为证 a^+ 是基数,任取 $\beta\in a^+$(即 $\beta\preccurlyeq a$),易知 $\beta\not\approx a^+$. 事实上,若 $\beta\approx a^+$,则导致 $a^+\preccurlyeq a, a^+\in a^+$. □

集的 Hartogs 数在 §8.5 中是为集建立号码库而引进的,现在又为我们提供了产生更大基数的方法(见下面定理 1).

如不说明,$\kappa,\lambda,\mu,\upsilon$ 等希腊字母自动表示基数.

命题 4 1° $\kappa\approx\lambda\leftrightarrow\kappa=\lambda$.

2° $\kappa\preccurlyeq\lambda\leftrightarrow\kappa\leqslant\lambda$.

3° $\kappa\prec\lambda\leftrightarrow\kappa<\lambda$.

证 1° 由基数定义,$\lambda<\kappa\rightarrow\lambda\not\approx\kappa$. 另一方向的蕴涵用等词性质.

2° 设 $\kappa\preccurlyeq\lambda$. 为证 $\kappa\leqslant\lambda$,反设 $\lambda<\kappa$;这时有 $\lambda\subset\kappa,\lambda\preccurlyeq\kappa$. 由 Cantor-Bernstein 定理(§6.3 定理)知 $\lambda\approx\kappa$,这与 κ 是基数矛盾. 反方向的蕴涵更简单:

$$\kappa\leqslant\lambda\rightarrow\kappa\subset\lambda\rightarrow\kappa\preccurlyeq\lambda.$$

3° 由 2°即得. (注意 $\kappa\prec\lambda$ 表示 $\kappa\preccurlyeq\lambda$ 但 $\kappa\not\approx\lambda$.) □

定理 1 比 κ 大的最小基数是 $\kappa^+(=\{\beta|\beta\preccurlyeq\kappa\}$,即 κ 的 Hartogs 数).

证 由命题 3 知 κ^+ 是基数. $\kappa<\kappa^+$ 是因为 $\kappa\preccurlyeq\kappa$(所以 $\kappa\in\kappa^+$). κ^+ 是比 κ 大的最小基数,最小性来自事实:

$$\lambda<\kappa^+\rightarrow\lambda\preccurlyeq\kappa\rightarrow\lambda\leqslant\kappa.\text{(后一步用了命题 4(2°).)}$$ □

反复用定理 1,可由 $\omega_0(=\omega)$ 出发得到一个比一个更大的基数:

$$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\omega_{n+1},\cdots, \tag{1}$$

其中 $\omega_{n+1}=\omega_n^+$.

是否有比(1)中列出的更大的基数? 下面的命题 5 提供了寻找更大基数的又一种方法.

命题 5 设集 a 的元素都是基数，则 $\bigcup a$ 也是基数，且是 a 的最小上界.

证 由 §8.2 命题 2 知 $\bigcup a$ 是序数，且是 a 的最小上界；故只用证 $\bigcup a$ 是基数便可，即只用证 $\alpha \in \bigcup a$ 时，便有 $\alpha \not\approx \bigcup a$. $\alpha \in \bigcup a$ 时，有 $\kappa \in a$ 使 $\alpha \in \kappa$，于是 $\alpha \subset \kappa \subset \bigcup a$. 这时若有 $\alpha \approx \bigcup a$，则 $\alpha \approx \kappa$（由 §6.3 引理 1 知），这与 κ 是基数矛盾. □

(1)中所列的可数个基数中没有最大的. 现令

$$\omega_\omega = \bigcup \{\omega_n \mid n \in \omega\}.$$

按命题 5，ω_ω 也是基数，且比每个 ω_n 都大. 以 ω_ω 为新的起点，又可反复应用定理 1 得到一个比一个更大的基数.

更一般地，有了定理 1 与命题 5，我们可让每个序数 α 联系着一个超限基数 ω_α：

$$\omega_0 = \omega.$$

$$\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+ (= \{\beta \mid \beta \preccurlyeq \omega_\alpha\}).$$

$$\omega_\alpha = \bigcup \{\omega_\gamma \mid \gamma < \alpha\},$$

这里 α 是极限序数.

练习 3 证明每个 ω_α 都是基数.

练习 4 证明：$\alpha < \beta \leftrightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$.

练习 5 证明 $\alpha \leqslant \omega_\alpha$.

ω_α 也写作 $\aleph_\alpha$. $\aleph$ 系列是否把所有超限基数包揽无遗？回答是肯定的.

定理 2 每个比 ω 大的基数一定是某个 $\aleph_\alpha$，即 ω_α.

证 任给基数 κ，都可作集

$$b = \{\beta \leqslant \kappa \mid \kappa \leqslant \omega_\beta\}.$$

因 $\kappa \leqslant \omega_\kappa$（练习 5），故 $\kappa \in b$，这说明 $b \neq \varnothing$. 记 b 中最小序数为 α，下证 $\kappa = \omega_\alpha$，这是所要的结果.

因 $\alpha \in b$，故 $\kappa \leqslant \omega_\alpha$. 现只用证 $\kappa \not< \omega_\alpha$ 便可. 反设 $\kappa < \omega_\alpha$，则总有矛盾（对 α 归纳）：

$\alpha = 0$，$\kappa < \omega_0$，这与定理的前提矛盾；

$\alpha = \beta + 1$ 时，$\beta < \alpha \leqslant \kappa$（因 $\alpha \in b$），且因反设 $\kappa < \omega_{\beta+1}$，这时只能有 $\kappa \leqslant \omega_\beta$（注意 $\omega_{\beta+1}$ 是比 ω_β 大的最小基数），这导致 $\beta \in b$，与 α 在 b 中的最小性矛盾；

α 是极限序数时，按 ω_α 的定义，$\kappa < \omega_\alpha$ 导致有某个 $\gamma < \alpha (\leqslant \kappa)$ 使 $\kappa < \omega_\gamma$，这导致 $\gamma \in b$，又与 α 在 b 中的最小性矛盾. □

按照定理 2，所有比 ω 大的超穷基数分成两类：

定义 2（后继基数与极限基数） $\omega_{\alpha+1}$ 叫做 ω_α 的后继基数（successor

cardinal). α 是极限序数时,ω_α 叫做极限基数(limit cardinal).(人们有时把 ω 也叫做极限基数.)

ω_α 作为序数,不管它是后继基数还是极限基数,都是极限序数.

练习 6 证明超穷基数都是极限序数.

基数由小到大排列如下:

$0,1,\cdots,n,\cdots\omega_0,\cdots,\omega_n,\cdots,\omega_\omega,\cdots,\omega_{\omega\cdot 2},\cdots,\omega_{\omega\cdot n},\cdots,\omega_{\omega^2},\cdots,\omega_{\omega^n},\cdots.$

把全体基数构成的基数宇宙记作 **Cn**. 假如 **Cn** 是集,则由命题 5 知 $\bigcup$**Cn** 也是基数,且是比所有基数都大的最大基数;但我们知道最大的基数是不存在的,例如基数的后继基数比该基数更大. 这就是 Cantor 悖论. 导致悖论的原因在于假定了 **Cn** 是集. **Cn** 不是集而是真类.

定理 3(**Cn** 上的超限归纳法) 假设下式成立:

$$\forall\kappa(\forall\lambda<\kappa p(\lambda)\rightarrow p(\kappa)),$$

那么便有 $\forall\kappa p(\kappa)$.

证 逐字逐句翻译 §8.4 定理 1(**On** 上的超限归纳法)的证明,只要把该证明中的 α,β 分别全部改为 κ,λ 便可. □

有了基数的概念,便可将基数用于计数,用于计算给定的集中的元素的多少. 我们把这种计数理解为拿给定的集与基数比较,看该集与哪个基数等势. 就是说,把集的元素个数定义为与该集等势的基数,并把这个基数叫做该集的基数. 用符号说,集 a 的基数,用 $|a|$ 表示,指与 a 等势的基数;即:若 a 与 κ 等势,则说 a 的基数 $|a|$ 等于 κ. 更简单的说,

$$a\approx\kappa\leftrightarrow|a|=\kappa.$$

由此即知

$$|a|=|b|\leftrightarrow a\approx b.$$

$a\approx n\in\omega$ 时,即 a 是有限集时,$|a|=n$. 这时 $|\mathscr{P}(a)|=2^n$(§6.1 练习 4). 由 §6.1 例 1 及 §6.3 例 2 知

$$|\mathbf{Z}|=|\mathbf{Q}|=\omega_0.$$

现在要问:任给集 a,$|a|$ 是否一定都有意义? 也就是问:对任意集 a,是否一定存在某个基数 κ 使 $a\approx\kappa$,从而 $|a|=\kappa$?

定理 4 良序原理 $\leftrightarrow$ 任意集都有基数.

证 ($\rightarrow$)任取集 a. 利用良序原理使 a 成为良序集. 由 §8.3 定理 1 知存在序数 $\alpha\approx a$, 与 a 等势的序数的最小者就是 $|a|$.

($\leftarrow$)假设对任意集 a,$|a|$ 都有意义,即存在 κ 使 $a\approx\kappa$,于是存在 κ 到 a 的双射,这个双射用 κ 的良序"$\in$"诱导了 a 的良序.(参见 §7.3 练习 2.) □

定理 4 让我们得到了选择公理的又一等价形式:任意集都有自己的基数.

这个定理的证明不难，但意义重要；它说明：选择公理是否成立，良序原理（“凡集皆可良序”）是否成立，关系到对任意集进行计数的可能性，关系到是否可用与基数等势的方式计算任意集的元素多少.

以后，当我们对任意集 a 谈论并使用它的基数 $|a|$ 时，意味着使用了选择公理.

练习 7 证明：

1° $a \preccurlyeq b \to |a| \leqslant |b|$,

2° $a \prec b \to |a| < |b|$.

练习 8 设 $a \subset n (\in \omega)$，但 $a \neq n$. 证明存在 $m < n$ 使 $|a| = m$.

§10.2 基数算术

在讨论基数运算之前，作为关于基数的超限归纳法（§10.1 定理 3）的应用例，我们先来建立超穷理论的一个重要基本事实——Hessenberg 定理. §6.1 例 1 与 §6.3 命题 2 是这个定理的特殊情形.

定理 1(Hessenberg) $\kappa \geqslant \omega \to \kappa \times \kappa \approx \kappa$.

证 设 $\kappa \geqslant \omega$. 为利用 Cantor-Bernstein 定理（§6.3 定理 1），首先注意

$$\kappa \approx \kappa \times \{0\} \subset \kappa \times \kappa,$$

这说明 $\kappa \preccurlyeq \kappa \times \kappa$. 下面对 $\kappa (\geqslant \omega)$ 归纳证明 $\kappa \times \kappa \preccurlyeq \kappa$ 便可.

§6.1 例 1 与 §6.3 例 1 已建立了事实：$\omega \times \omega \approx \omega$，这是归纳的起步.

归纳假设：$\omega \leqslant \lambda < \kappa$ 时，有

$$\lambda \times \lambda \preccurlyeq \lambda. \tag{1}$$

为证 $\kappa \times \kappa \preccurlyeq \kappa$，先在 $\kappa \times \kappa$ 中建立良序（也用“$<$”表示）.（想法是：先把 $\kappa \times \kappa$ 拉成一条线，然后与 κ 比较.）任取 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \kappa$. 若以下三个条件之一成立，则说 $(\alpha_1, \beta_1) < \alpha_2, \beta_2)$：

1° $\max\{\alpha_1, \beta_1\} < \max\{\alpha_2, \beta_2\}$,

2° $\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$，但 $\alpha_1 < \alpha_2$,

3° $\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$，且 $\alpha_1 = \alpha_2$，但 $\beta_1 < \beta_2$.

κ 作为序数的良序性决定了上面定义的序在 $\kappa \times \kappa$ 上的良序性. $\kappa \times \kappa$ 有了良序，按 §8.3 定理 1，惟一存在序数 γ 与之同构：

$$\gamma \cong \kappa \times \kappa.$$

（我们看到：$\kappa \times \kappa$ 与 κ 之间的比较现在转化为 $\kappa \times \kappa$ 的替身 γ 与 κ 的比较.）

下证 $\gamma \leqslant \kappa$. 反设 $\kappa < \gamma$，这时取 γ 到 $\kappa \times \kappa$ 的同构映射 f，并设

$$f(\kappa) = (\alpha, \beta), \alpha, \beta < \kappa.$$

由 f 的保序性知,若把良序集 $\kappa\times\kappa$ 中以(α,β)为端点的前段记作 A,则有

$$\kappa\cong A.(\text{“前段”在同构之下保持.})\tag{2}$$

因基数 κ 作为序数一定是极限序数(§10.1 练习6),故由 $\alpha<\kappa$ 及§8.2 命题3 知

$$\alpha+1<\kappa,\tag{3}$$

显然 α 或$\beta\geqslant\omega$,否则以(α,β)为端点的前段 A 成了有限集,不会与 κ 同构,从而与(2)矛盾.于是有

$$\omega\leqslant|\alpha+1|\leqslant\alpha+1.\tag{4}$$

有了(3)与(4),便可以用归纳假设(1)得

$$|\alpha+1|\times|\alpha+1|\leqslant|\alpha+1|.\tag{5}$$

现不妨设 $\beta\leqslant\alpha$(α,β 谁大,与下面的证明无关),这时有$(\alpha,\beta)\in(\alpha+1)\times(\alpha+1)$;而前段 A 以(α,β)为端点,于是

$$A\subset(\alpha+1)\times(\alpha+1)(\approx|\alpha+1|\times|\alpha+1|).\tag{6}$$

依次用(2),(6),(5)便得 $\kappa\leqslant|\alpha+1|$,进而得 $\kappa\leqslant|\alpha+1|\leqslant\alpha+1$,这与(3)矛盾,至此已证明 $\gamma\leqslant\kappa$,进而得 $\gamma\leqslant\kappa,\kappa\times\kappa\leqslant\kappa$. □

将定理 1 用到实数集 $\mathbf{R}$,有

$$|\mathbf{R}|\times|\mathbf{R}|\approx|\mathbf{R}|,$$

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\approx\mathbf{R}.$$

这就是说,平面上的点和直线上的点一样多.进一步可知 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点和直线上的点一样多(参见§6.3 命题 2).

下面定义基数的算术运算.

类似于序数运算,基数算术运算是自然数运算的另一种推广与扩张.基数运算与序数运算是不同的.本书在符号上不加区别,需要在具体场合注意鉴别.

定义 1(基数加法与乘法) 基数的加法与乘法,用 + 与·表示,分别由以下二式定义:

$$\kappa+\lambda=|\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|,$$

$$\kappa\cdot\lambda=|\kappa\times\lambda|,$$

二式右边的“×”仍表示集的 Cartesian 积.

下面的练习 1 告诉我们,当定义 1 中的加与乘限制于自然数时,与自然数原有的相应运算是一致的.

练习 1 设 $m,n\in\omega$.证明:

1° $m\times\{0\}\cup n\times\{1\}\approx m+n$(右边“+”指自然数加).

2° $m\times n\approx m\cdot n$(右边“·”指自然数乘).

练习 2　设 $\kappa \geqslant \omega$. 证明:

1°　$\kappa + 1 = \kappa$.

2°　$\kappa \cdot 1 = \kappa$.

基数加法与乘法满足交换律、结合律与分配律. 以分配律为例:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

成立的理由是

$$\begin{aligned} \kappa \times | \lambda \times \{0\} \cup \mu \times \{1\} | &\approx \kappa \times (\lambda \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}) \\ &\approx \kappa \times (\lambda \times \{0\}) \cup \kappa \times (\mu \times \{1\}) \\ &\approx (\kappa \times \lambda) \times \{0\} \cup (\kappa \times \mu) \times \{1\} \\ &\approx (\kappa \cdot \lambda) \times \{0\} \cup (\kappa \cdot \mu) \times \{1\}. \end{aligned}$$

以上各步用了以下事实:

$$\begin{aligned} &| a | \approx a, \\ &a \approx b \to c \times a \approx c \times b, \\ &a \times (b \cup c) \approx a \times b \cup a \times c, \\ &a \times (b \times c) \approx (a \times b) \times c. \end{aligned}$$

此外, 验证其他各律还要用事实:

$$\begin{aligned} &a \approx a \times \{0\}, \\ &a \times \{0\} \approx a \times \{1\}, \\ &a \times b \approx b \times a, \text{等等}. \end{aligned}$$

有了基数乘法的概念, 定理 1 可写成:

定理 1′(Hessenberg)　$\kappa \geqslant \omega$ 时 $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

注意文献中出现 $\kappa^2 = \kappa$ 时, κ^2 不表示 $\kappa \times \kappa$(Cartesian 积)而表示 $\kappa \cdot \kappa$.

有了 Hessenberg 定理, 立即可得超穷基数的基本计算公式.

定理 2(基数计算基本公式)　设 $\kappa \geqslant \omega$ 且 $\kappa \geqslant \lambda$, 则有:

1°　$\kappa + \lambda = \kappa$.

2°　$\kappa \cdot \lambda = \kappa \ (\lambda > 0)$.

证　$\lambda = 1$ 时见练习 2. 公式 1°当 $\lambda = 0$ 时显然成立.

下设 $\lambda \geqslant 2$. 我们有

$$\begin{aligned} \kappa &\approx \kappa \times \{0\} \\ &\subset \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \quad (\text{此项基数为 } \kappa + \lambda) \\ &\subset \kappa \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\} \\ &= \kappa \times 2 \\ &\subset \kappa \times \lambda \quad (\text{此项基数为 } \kappa \cdot \lambda) \\ &\subset \kappa \times \kappa. \end{aligned}$$

由 Hessenber 定理知以上各式右端皆与 κ 等势，基数皆为 κ. □

下面是一个关于基数计算的常用结论，它是可数集的一个相应性质的推广（见§6.4 可数集性质 7）.

定理 3 设 $\kappa \geqslant \omega$，且对每个 $\alpha<\kappa$ 都有 $|a_\alpha| \leqslant \kappa$，则

$$|\bigcup_{\alpha<\kappa} a_\alpha| \leqslant \kappa.$$

证 因 $a_\alpha \leqslant \kappa$（注意 $a_\alpha \approx |a_\alpha| \leqslant \kappa$），故对每个 α 都可取 a_α 到 κ 的一个单射 f_α. 利用这些 f_α 定义映射 $f: \bigcup_{\alpha<\kappa} a_\alpha \to \kappa\times\kappa$ 如下：

$$\forall x \in \bigcup_{\alpha<\kappa} a_\alpha, f(x) = \langle \alpha, f_\alpha(x) \rangle,$$

其中 α 取为使 $x \in a_\alpha$ 的最小 α. f_α 是单射决定了 f 是单射. 由§10.1 命题 4(2°)知

$$|\bigcup_{\alpha<\kappa} a_\alpha| \leqslant |\kappa\times\kappa| = \kappa. \quad \square$$

下面定义基数的指数运算.

定义 2（基数的指数运算） $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$，其中 ${}^\lambda\kappa = \{f \mid f: \lambda\to\kappa\}$.

基数的指数运算与序数的指数运算（§8.4 例 3）是不同的两种运算，但它们与通常的自然数指数运算都是一致的. 例如，3 到 2 的映射共有 8 个，故 $2^3 = |{}^3 2| = 8$. 一般，$|{}^m n| = n^m$（右边是自然数的指数运算）.

κ, λ 等字母自动用来表示基数，故 κ^λ 自动表示基数的指数运算而不是序数的指数运算.

命题 1 $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu} (\kappa\neq 0)$.

证 容易验证以下事实：

1° $a\approx b \to {}^a c \approx {}^b c, \quad a\approx b \to {}^c a \approx {}^c b$;

2° $a\cap b = \varnothing$ 时，${}^{a\cup b}c \approx {}^a c \times {}^b c$;

3° ${}^a({}^b c) \approx {}^{a\times b} c$.

于是有

$$\begin{aligned}
{}^{\lambda+\mu}\kappa &\approx {}^{\lambda\times\{0\}\cup\mu\times\{1\}}\kappa && \text{(由 1° 及 + 的定义)}\\
&\approx {}^{\lambda\times\{0\}}\kappa \times {}^{\mu\times\{1\}}\kappa && \text{(由 2°)}\\
&\approx {}^\lambda\kappa \times {}^\mu\kappa && \text{(由 1°)}\\
&\approx \kappa^\lambda \times \kappa^\mu && \text{(由定义 2)}\\
&\approx \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu. && \text{(由 · 的定义)}\\
{}^\mu(\kappa^\lambda) &\approx {}^\mu({}^\lambda\kappa) && \text{(由 1°)}\\
&\approx {}^{\mu\times\lambda}\kappa && \text{(由 3°)}\\
&\approx {}^{\mu\cdot\lambda}\kappa = {}^{\lambda\cdot\mu}\kappa.
\end{aligned}$$

□

练习3 设 $\kappa>0$. 证明：

1° $\lambda>\mu \to \kappa^\lambda \geqslant \kappa^\mu$,

2°　$\kappa^\lambda > \kappa^\mu \to \lambda > \mu$.

下面的命题给出了基数指数运算的基本公式.

命题 2　设 $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$,且 $\lambda \geqslant \omega$,则有

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda = |\mathscr{P}(\lambda)|.$$

证　对每个映射 $f: \lambda \to \lambda$,有 $f \subset \lambda \times \lambda$. 于是 ${}^\lambda\lambda \subset \mathscr{P}(\lambda \times \lambda)$. 我们有

$${}^\lambda 2 \subset {}^\lambda\kappa \subset {}^\lambda\lambda \subset \mathscr{P}(\lambda \times \lambda) \approx \mathscr{P}(\lambda) \approx {}^\lambda 2,$$

上面最后一步用了 §6.1 命题 1. 现用 §6.3 引理 1 得

$${}^\lambda\kappa \approx {}^\lambda 2 \approx \mathscr{P}(\lambda).$$ □

有了基数的概念之后,让我们回到连续统假设. 现问:实数集 **R** 的基数 $|\mathbf{R}|(=2^{\omega_0})$究竟有多大?(也就是问:直线上有多少个点?)Gödel 与 Cohen 的研究成果表明,按现有集论的基数理论,对上述问题无法给出明确回答.

下面是用基数语言表述的连续统假设(即 Cantor 猜想).

CH(连续统假设)　$2^{\omega_0} = \omega_1$.

假设中的 $\omega_1 = \omega^+ = \{\beta \mid \beta \preccurlyeq \omega\}$是比 ω 大的最小基数(即第一不可数基数),它由所有可数序数(包括自然数)组成.

对一般基数 ω_α,因 $\omega_\alpha \prec \mathscr{P}(\omega_\alpha) \approx {}^{\omega_\alpha}2$,故 $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$. 现问:$2^{\omega_\alpha}$有多大?

GCH(广义连续假设 Generalized Continuum Hypothesis) $\forall \alpha (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$.

连续统假设是广义连续统假设当 $\alpha = 0$ 时的特殊情形.

在不假设选择公理成立的情形下,广义连续统假设的表述是:

$$\forall \kappa ({}^\kappa 2 \approx \kappa^+),$$

其中 $\kappa^+ = \{\beta \mid \beta \preccurlyeq \kappa\}$是比超穷基数 κ 大的最小基数.

练习 4　比较以下集的基数大小,将它们用≈或≤或<最确切地排成一串. 这些集是 **N**,**Q**,**R**,**C**,**R** − **Q** 及 $a_1 \sim a_{12}$,其中

a_1 是有 10 个元素的某个有限集,

$a_2 = \omega^+ (= \{\beta \in \mathbf{On} \mid \beta \preccurlyeq \omega\})$,

$a_3 = \mathscr{P}(\omega)$,

$a_4 = 2^\omega$,

$a_5 = \mathscr{P}(\mathbf{R})$,

$a_6 = {}^{\mathbf{R}}2$,

a_7 为直线上所有闭区间,如$[0,1]$,$[-1,\sqrt{2}]$,…构成的集,

$a_8 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))))$,

a_9 是数列 x_n 的所有子数列,这里 x_n 是一已知(固定的)实数列,各项彼此不同,

a_{10}是数列 x_n 的所有子数列，这里 x_n 只有 10 项彼此不同，其余各项为一常数，

$a_{11}={}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$，即定义在$(-\infty,+\infty)$上的实函数的全体，

$a_{12}=\{f\in{}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}\mid f$ 点点连续$\}$.

10.2 附　序数与基数的加乘运算的关系

序数的加法与乘法的定义是(§8.4 例 1，例 2)：

$$\begin{cases}\alpha+0=\alpha,\\ \alpha+\beta'=(\alpha+\beta)',\\ \alpha+\beta=\bigcup\{\alpha+\gamma\mid\gamma<\beta\}(\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时});\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha\cdot 0=0,\\ \alpha\cdot\beta'=\alpha\cdot\beta+\alpha,\\ \alpha\cdot\beta=\bigcup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma<\beta\}(\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时}).\end{cases}$$

在集 $\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$ 中用如下方式定义序"<"：

$$(x,0)<(y,1),\qquad(x\in\alpha,y\in\beta)$$
$$(x,0)<(y,0),\qquad(x\in y\in\alpha)$$
$$(x,1)<(y,1),\qquad(x\in y\in\beta)$$

这样，$\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$成了良序集，现将它的序型用 $\alpha\oplus\beta$ 表示. 按序型的定义(序型是与该良序集同构的惟一序数)，可验证以下各式成立：

$$\alpha\oplus 0=\alpha,$$
$$\alpha\oplus\beta'=(\alpha\oplus\beta)',$$
$$\alpha\oplus\beta=\bigcup\{\alpha\oplus\gamma\mid\gamma<\beta\},\text{当 }\beta\text{ 是极限序数时}.$$

由序数加法的惟一性可得 $\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta$.

再在集 $\beta\times\alpha$ 中定义序"<"如下：

$$(x,y)<(x_1,y_1),\quad(x\in x_1\in\beta)$$
$$(x,y)<(x,y_1),\quad(y\in y_1\in\alpha)$$

这样，$\beta\times\alpha$ 成了良序集，现将它的序型用 $\alpha\odot\beta$ 表示. 经验证，以下各式成立：

$$\alpha\odot 0=0,$$
$$\alpha\odot\beta'=\alpha\odot\beta+\alpha,$$
$$\alpha\odot\beta=\bigcup\{\alpha\odot\gamma\mid\gamma<\beta\},(\text{当 }\beta\text{ 为极限序数时.})$$

由序数乘法的惟一性可得 $\alpha\odot\beta=\alpha\cdot\beta$.

从以上讨论得出结果(以下暂且用$\oplus$与$\odot$分别表示序数的加与乘)：

1°　$\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}\approx\kappa\oplus\lambda$.

2°　$\kappa\times\lambda\approx\lambda\odot\kappa$.

由此,关于基数的+,·与序数的$\oplus$,$\odot$的关系,有以下结论:

$$\kappa+\lambda=|\kappa\oplus\lambda|,$$

$$\kappa\cdot\lambda=|\kappa\odot\lambda|.$$

*§10.3　正则基数与奇异基数

为了深入研究基数及其运算的性质,人们常利用共尾数的概念.

若映射 $f:\beta\to\alpha$ 是无界的,即 f 的值域 $f[\beta]$ 在 α 中无界:

$$\forall\gamma\in\alpha\,\exists\delta\in\beta(\gamma\leqslant f(\delta)),$$

则说 β 与 α 共尾.

例如,$\beta\approx\alpha$ 时,β 必与 α 共尾,这是因为 β 到 α 的双射自然是无界的.又如,当 α 是后继序数($\alpha=\beta+1$)时,1 便与 α 共尾;这是因为:若令 $f(0)=\beta$,则 f 便是 1 到 α 的无界映射.($f(0)=\beta$ 是 α 中的最大元).另外,若 β 与 α 共尾,而 $\beta\leqslant\gamma$,则 γ 也与 α 共尾.

定义 1(共尾数(cofinality))　序数 α 的共尾数,用 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 表示,指与 α 共尾的最小序数.

按定义 1,我们知道:

1. $\mathrm{cf}(\alpha)$是序数.
2. 存在 $\mathrm{cf}(\alpha)$到 α 的无界映射.
3. $\mathrm{cf}(\alpha)$有最小性,就是说,若 β 也与 α 共尾,则 $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\beta$.

另外,因 α 当然与自己共尾,故由 $\mathrm{cf}(\alpha)$的最小性知 $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\alpha$.当 α 为后继序数时 $\mathrm{cf}(\alpha)=1$.因 $n(\in\omega)$不与 ω 共尾,故 $\mathrm{cf}(\omega)=\omega$.

命题 1　设 β 与极限序数 α 共尾,且 f 是 β 到 α 的无界映射,则

$$\alpha=\bigcup f[\beta].$$

证　首先有$\bigcup f[\beta]\subset\alpha$,因 α 是可递集.

任取 $\gamma\in\alpha$.因 $f[\beta]$在 α 中无界,故存在 $\delta\in\beta$ 使$f(\delta)>\gamma$.由此知 $\gamma\in\bigcup f[\beta]$.　□

命题 2　$\mathrm{cf}(\alpha)$到 α 一定存在严格递增的无界映射.

证　任取 $\mathrm{cf}(\alpha)$到 α 的无界映射g.用 g 如下定义的函数 f 是 $\mathrm{cf}(\alpha)$到 α 的严格递增的无界映射:

$$f(\beta)=\max\{g(\beta),\ \bigcup\{f(\gamma)+1\mid\gamma<\beta\}\},\ \beta<\mathrm{cf}(\alpha).\qquad\square$$

命题3　若存在 α 到β 的严格递增的无界映射,则 $\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\beta)$.

证 设 f 是 α 到 β 的严格递增的无界映射.

先证 $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\mathrm{cf}(\beta)$.

取 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的无界映射 g. 记 $h=f\circ g:\mathrm{cf}(\alpha)\rightarrow\beta$. h 是无界的,理由如下. 对任一 $\beta_0\in\beta$,可取 $\alpha_0\in\alpha$ 使 $f(\alpha_0)>\beta_0$(f 的无界性);再取 $\gamma\in\mathrm{cf}(\alpha)$使 $g(\gamma)>\alpha_0$(g 的无界性). 这时有(注意 f 严格递增):

$$h(\gamma)=f(g(\gamma))>f(\alpha_0)>\beta_0.$$

既然 h 是无界的,于是 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 与 β 共尾;因 $\mathrm{cf}(\beta)$ 具有最小性,故 $\mathrm{cf}(\alpha)\geqslant\mathrm{cf}(\beta)$.

再证 $\mathrm{cf}(\beta)\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$.

取 $\mathrm{cf}(\beta)$ 到 β 的无界映射 g. 再构造 $\mathrm{cf}(\beta)$ 到 α 的无界映射 h. 对任一 $\gamma\in\mathrm{cf}(\beta)$,令

$$h(\gamma)=\min\{\delta\in\alpha\mid f(\delta)>g(\gamma)\}(\text{用了 } f \text{ 的无界性}).\tag{1}$$

任取 $\alpha_0\in\alpha$. 因 $f(\alpha_0)\in\beta$,由 g 的无界性知存在 $\beta_0\in\mathrm{cf}(\beta)$使

$$g(\beta_0)\geqslant f(\alpha_0).\tag{2}$$

现可断言 $h(\beta_0)>\alpha_0$,从而知 h 是无界映射. 反设 $\alpha_0\geqslant h(\beta_0)$,那么

$$\begin{aligned} f(\alpha_0)&\geqslant f(h(\beta_0)) &&(f\text{ 的递增性})\\ &>g(\beta_0), &&(\text{由 } h \text{ 的定义(1),其中 } \gamma \text{ 取为 } \beta_0.)\end{aligned}$$

这与(2)矛盾. 既然 $h:\mathrm{cf}(\beta)\rightarrow\alpha$ 是无界映射,由 $\mathrm{cf}(\alpha)$的最小性得 $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\mathrm{cf}(\beta)$. □

推论 1 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$.

证 令 $\beta=\mathrm{cf}(\alpha)$. 由命题 2 知 β 到 α 存在严格递增的无界映射,再利用命题 3 便可. □

有了共尾数的概念,我们便可用它来深入研究基数.

命题 4 若 $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$,则 α 是基数.

证 设 $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$. 反设 α 不是基数,便有 $\beta<\alpha$ 使$\beta\approx\alpha$,从而 β 与 α 共尾;此时 $\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$,与 $\mathrm{cf}(\alpha)$的最小性矛盾. □

推论 2 $\mathrm{cf}(\alpha)$是基数.

证 由推论 1 及命题 4 即得. □

命题 5 对极限序数 α,$\mathrm{cf}(\omega_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha)$. 特例:$\mathrm{cf}(\omega_\omega)=\omega$.

证 按命题 3,只要建立 α 到ω_α 的严格递增无界映射便可.

对任一 $\beta<\alpha$,令 $f(\beta)=\omega_\beta$,f 即为所求,f 的严格递增性见 §10.1 练习 4. $f[\alpha]$在 ω_α 中无界,这是因为对极限序数 α 有 $\omega_\alpha=\bigcup\{\omega_\gamma\mid\gamma<\alpha\}$. □

我们知道 $\kappa<\mathscr{P}(\kappa)\approx{}^{\kappa}2$,故 $\kappa<2^\kappa$. 现在可进一步断言:当 $\kappa\geqslant\omega$ 时,

$\mathrm{cf}(2^{\kappa})>\kappa$. 为此先要建立下面重要的 König 引理.

引理 1(König 引理) 设 $\kappa\geqslant\omega$ 且 $\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\lambda$,则 $\kappa^{\lambda}>\kappa$.

证 只用证任意 $g:\kappa\to{}^{\lambda}\kappa$ 都不是满射,从而 $\kappa\neq\kappa^{\lambda}$.

因 $\lambda\geqslant\mathrm{cf}(\kappa)$,故存在无界映射 $f:\lambda\to\kappa$. 现任取 $\alpha\in\lambda$,对任一 $\beta\in f(\alpha)$ $(\in\kappa)$,有

$$\beta\in\kappa, g(\beta)\in{}^{\lambda}\kappa,\quad (g(\beta))(\alpha)\in\kappa.$$

对固定的 $\alpha(\in\lambda)$,令 $b=\{(g(\beta))(\alpha)\mid\beta\in f(\alpha)\}$. $b\subset\kappa$,且自然有 $f(\alpha)$到 b 的满射,于是

$$|b|\leqslant|f(\alpha)|<\kappa.\text{(参见 §6.5,这里用到了选择公理)}\qquad(3)$$

下面构造 $h:\lambda\to\kappa$ 使 $h\notin g[\kappa]$,从而证明 g 不是满射. 根据(3),可设

$$h(\alpha)=\min(\kappa-b),\quad\alpha\in\lambda.$$

现证 $h\notin g[\kappa]$. 反设 $h\in g[\kappa]$,即存在 $\beta_0\in\kappa$ 使 $h=g(\beta_0)\in{}^{\lambda}\kappa$. 由 h 的定义可得

$$(g(\beta_0))(\alpha)=h(\alpha)\notin b,$$

再由 b 的定义知$\beta_0\geqslant f(\alpha)$. 因 α 任意取自λ,故 β_0+1 成了 $f[\lambda]$的上界,这与 f 的无界性矛盾. □

定理 1 若 $\kappa\geqslant\omega$,则 $\mathrm{cf}(2^{\kappa})>\kappa$.

证 反设 $\mathrm{cf}(2^{\kappa})\leqslant\kappa$,则由引理 1 得$(2^{\kappa})^{\kappa}>2^{\kappa}$,但$(2^{\kappa})^{\kappa}=2^{\kappa\cdot\kappa}=2^{\kappa}$,矛盾. □

推论 3 $2^{\omega}\neq\omega_{\omega}$.

证 由定理 1 知 $\mathrm{cf}(2^{\omega})>\omega$,但由命题 5 有 $\mathrm{cf}(\omega_{\omega})=\omega$. □

如果除了利用选择公理还承认连续统假设,则有下面的结果.

定理 2(GCH) 设 $\kappa\geqslant2,\lambda\geqslant1$ 且 $\max\{\kappa,\lambda\}\geqslant\omega$,则有下表:

λ	$\kappa\leqslant\lambda$	$\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\lambda<\kappa$	$\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$
κ^{λ}	λ^{+}	κ^{+}	κ

其中 λ^{+}指比 λ 大的最小基数.

证 1° $\kappa\leqslant\lambda$ 时,由 §10.2 命题 2 及广义连续统假设知 $\kappa^{\lambda}=2^{\lambda}=\lambda^{+}$.

2° 设 $\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\lambda<\kappa$. 由引理 1 知 $\kappa^{\lambda}>\kappa$,同时有 $\kappa^{\lambda}\leqslant\kappa^{\kappa}=2^{\kappa}=\kappa^{+}$.

3° 设 $\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$. 先证

$$^{\lambda}\kappa=\bigcup\{{}^{\lambda}\alpha\mid\alpha<\kappa\}.\qquad(4)$$

若 $f\in{}^{\lambda}\alpha(\alpha<\kappa)$,则当然有 $f\in{}^{\lambda}\kappa$. 反过来,设 $f\in{}^{\lambda}\kappa$;这时因 $\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$,故 f 不是无界映射,于是存在 $\alpha\in\kappa$,α 是 $f[\lambda]$ 的上界,这说明 $f\in{}^{\lambda}\alpha$. (4)证毕.

再证当 $\alpha<\kappa$ 时,

$$|{}^{\lambda}\alpha|\leqslant(\max\{|\alpha|,\lambda\})^{+}\leqslant\kappa \tag{5}$$

事实上,$|{}^{\lambda}\alpha|=|{}^{\lambda}|\alpha||=|\alpha|^{\lambda}$,于是

$\lambda\geqslant|\alpha|$ 时,$|\alpha|^{\lambda}=\lambda^{+}$(由 1°);

$\lambda<|\alpha|$ 时,$|\alpha|^{\lambda}\leqslant|\alpha|^{|\alpha|}=|\alpha|^{+}$(由 1°);

总之有 $|{}^{\lambda}\alpha|=|\alpha|^{\lambda}\leqslant(\max\{\lambda,|\alpha|\})^{+}$. 又因 $|\alpha|\leqslant\alpha<\kappa$,且 $\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\kappa$,故(5)证毕.

由(4),(5)及 §10.2 定理 3 便知 $\kappa^{\lambda}=\kappa$. □

定义 2(正则基数(regular cardinal),奇异基数(singular cardinal)) 若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\kappa$,则 κ 叫做正则基数;若 $\mathrm{cf}(\kappa)<\kappa$,则 κ 叫做奇异基数.

从定理 2 的基数运算表可见,正则基数与奇异基数在指数运算的性质上是有差异的.

命题 6 后继基数 κ^{+} 一定是正则基数.

证 反设 κ^{+} 不是正则基数,即存在 $\alpha<\kappa^{+}$ 及无界映射 $f:|\alpha|\to\kappa^{+}$(这时 $\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant|\alpha|<\kappa^{+}$),那么由命题 1(注意 κ^{+} 作为序数是极限序数)知

$$\kappa^{+}=\bigcup f[|\alpha|]=\bigcup_{\beta<|\alpha|}f(\beta).$$

$\beta<|\alpha|$ 时,$f(\beta)\in\kappa^{+}$,故 $|f(\beta)|\leqslant\kappa$;又因 $|\alpha|<\kappa^{+}$,故 $|\alpha|\leqslant\kappa$. 用 §10.2 定理 3 便得 $\kappa^{+}\leqslant\kappa$,矛盾. □

由命题 6 知奇异基数只会出现在极限基数中.(极限基数指 ω_{α},这里 α 是极限序数.)例如,ω_{ω} 是奇异基数(见命题 5:$\mathrm{cf}(\omega_{\omega})=\omega$).

定义 3(弱不可达基数(weakly inaccessible cardinal)) 正则极限基数叫做弱不可达基数.

命题 7 设 ω_{α} 是弱不可达基数,则 $\omega_{\alpha}=\alpha$.

证 首先,对 α 归纳易证 $\alpha\leqslant\omega_{\alpha}$. 又因 α 是极限序数,由 ω_{α} 的正则性及命题 5 知

$$\omega_{\alpha}=\mathrm{cf}(\omega_{\alpha})=\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\alpha.$$ □

定义 4(强不可达基数(strongly inaccessible cardinal)) 满足下面条件的正则基数 κ 叫做强不可达基数:

$$\kappa>\omega \text{ 且 } \forall\lambda<\kappa(2^{\lambda}<\kappa). \tag{6}$$

上面的条件蕴涵着 κ 是极限基数,于是强不可达基数一定也是弱不可达基数. 如果承认广义连续统假设,那么反过来也是对的:

命题 8(GCH) 弱不可达基数 = 强不可达基数.

证 只须证明正则极限基数 κ 一定具有性质(6).

由命题 7 知 $\omega_\kappa=\kappa$. $\lambda<\omega$ 时,显然 $2^\lambda<\kappa$. $\omega\leqslant\lambda<\kappa$ 时,存在 β 使 $\lambda=\omega_\beta<\kappa=\omega_\kappa$,于是有

$$\beta<\kappa \text{ 及 } \beta+1<\kappa,$$
$$\omega_{\beta+1}<\omega_\kappa=\kappa,$$
$$2^\lambda=\lambda^+=\omega_{\beta+1}<\kappa. \qquad \square$$

集论后来的发展引导人们研究各种被称作"大基数"的基数,与较小基数相比大得很多很多.(这类似于 ω,ω 比自然数大得很多很多.)不可达基数便是大基数中的一种.设 κ 是个弱不可达基数,那它既不是某个较小基数的后继,也不是少于 κ 个较小基数的并.

在 ZFC 系统中证明不了弱不可达基数的存在性.

§10.4 基数计算例:ω 上超滤空间有多大?

进入现代数学各个分支,基数计算随处可见,现仅举集论本身一例.

ω 上子集族 F 是 ω 上超滤,指 F 具有以下性质(见 4.4.1 定义 1):

1° $\varnothing\notin F,\omega\in F$.

2° 若 $a,b\in F$,则 $a\cap b\in F$.

3° 若 $a\subset b\subset\omega$ 且 $a\in F$,则 $b\in F$.

4° $\forall a\subset\omega(a\in F\vee(\omega-a)\in F)$.

所有 ω 上超滤构成的集记作 $\beta\omega$(或 $\beta\mathbf{N}$).

现问:$|\beta\omega|=?$

以下各结论的证明主要取自[86].

命题 1(Sierpinski) 存在 ω 的无限子集族 $\{s_\alpha\mid\alpha<2^\omega\}$ 满足:

$$\alpha<\beta<2^\omega \text{ 时}, \quad |s_\alpha\cap s_\beta|<\omega. \tag{1}$$

证 下面的证明中,我们把寻找 ω 的子集族改为寻找 $\mathbf{Q}$ 的子集族.这是因为 $\mathbf{Q}$ 与 ω 之间存在一一对应,在这种对应之下性质(1)保持.

因无理数集 $\mathbf{R}-\mathbf{Q}\approx\mathbf{R}\approx2^\omega$,故可设

$$\mathbf{R}-\mathbf{Q}=\{x_\alpha\mid\alpha<2^\omega\}.$$

对每个 $\alpha<2^\omega$,任取一收敛于 x_α 的有理数列.该数列作为集,记为 s_α. s_α 当然是无限集,集族 $\{s_\alpha\mid\alpha<2^\omega\}$ 满足条件(1),这是因为分别收敛于两个不同的无理数的两个有理数列不可能有无限多个公共项. $\square$

命题 1 的结论让人感到新鲜,它的意思是说:自然数集 ω 能从中取出不

可数无限多个(与实数一样多的)"几乎互不相交"的无限子集. 这说明了自然数的性质是何等丰富多样.

命题 2 存在集对之族 $\{(A_\alpha^0, A_\alpha^1) \mid \alpha < 2^\omega\}$，其中 A_α^0, A_α^1 都是 ω 的无限子集，$A_\alpha^0 \cap A_\alpha^1 = \varnothing$，且满足

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n < 2^\omega, \forall i_1, \cdots, i_n \in \{0,1\}(\mid A_{\alpha_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\alpha_n}^{i_n} \mid = \omega). \quad (2)$$

证 把 ω 的全体有限子集的集记作 $[\omega]^{<\omega}$. 考虑到 $[\omega]^{<\omega} \approx \omega$ (参见§6.4练习 1(8))，如同命题 1 的证明，现把寻找 ω 的子集对族改为寻找 $[\omega]^{<\omega}$ 的具有相应性质的子集对族.

设 $\{s_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$ 是命题 1 中具有性质(1)的(ω 的)无限子集族. 由性质(1)易知

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n < 2^\omega(\mid \omega - s_{\alpha_1} \cup \cdots \cup s_{\alpha_n} \mid = \omega). \quad (3)$$

对任一 s_α，我们把 ω 的所有有限子集分成两类，一类由那些与 s_α 相交的有限子集组成，记作 A_α^0，另一类由那些不与 s_α 相交的有限子集组成，记作 A_α^1，即令

$$A_\alpha^0 = \{E \in [\omega]^{<\omega} \mid E \cap s_\alpha \neq \varnothing\},$$
$$A_\alpha^1 = \{E \in [\omega]^{<\omega} \mid E \cap s_\alpha = \varnothing\}.$$

因 s_α 是无限集，故有无限多个 ω 的有限子集与 s_α 相交，即 A_α^0 是无限集；又因 s_α 具有性质(1)("几乎互不相交")，故另有无限多个 ω 的有限子集与 s_α 不相交，即 A_α^1 也是无限集，且 $A_\alpha^0 \cap A_\alpha^1 = \varnothing$.

集对族 $\{(A_\alpha^0, A_\alpha^1) \mid \alpha < 2^\omega\}$ 满足条件(2)，这是因为：对任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n < 2^\omega$，在 ω 的有限子集中，有无限多个与 $s_{\alpha_1}, \cdots, s_{\alpha_n}$ 中任意指定的几个都相交(因每个 s_α 都是无限集)，而它们同时与 $s_{\alpha_1}, \cdots, s_{\alpha_n}$ 中的其他几个都不相交(注意(3)). 也就是说，$A_{\alpha_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\alpha_n}^{i_n}$ 总有无限多个成员. □

命题 2 的结论告诉我们：自然数的性质有丰富得难以想象的相容组合.

下面是本节的目的.

定理 1(Hausdorff) $|\beta\omega| = 2^{2^\omega}$.

证 取命题 2 中的集对族 $\{(A_\alpha^0, A_\alpha^1) \mid \alpha < 2^\omega\}$，其中 A_α^0, A_α^1 是 ω 的无限子集，$A_\alpha^0 \cap A_\alpha^1 = \varnothing$ 且使性质(2)成立.

对任一函数 $f: 2^\omega \to 2$，考察 ω 的子集族 $G = \{A_\alpha^{f(\alpha)} \mid \alpha < 2^\omega\}$ (注意 $f(\alpha) \in \{0,1\}$). 性质(2)保证了 G 具有有限交性质，故由滤子扩张原则(§9.4)知，存在 ω 上超滤 $F_f \supset G$. (F_f 与 f 有关，这是因为族 G 中的每个成员 $A_\alpha^{f(\alpha)}$ 是 A_α^0 还是 A_α^1，由 f 的函数值 $f(\alpha)$ 确定.)

现在我们看到,每个 $f\in{}^{2^\omega}2$ 对应有 ω 上超滤 F_f,于是有由 $\mathscr{F}(f)=F_f$ 定义的映射 $\mathscr{F}:{}^{2^\omega}2\to\beta\omega$.不难验证 $\mathscr{F}$ 是单射:

$$f_1\neq f_2\to F_{f_1}\neq F_{f_2}.$$

事实上,设 $f_1\neq f_2$,则有某个 $\alpha<2^\omega$ 使 $f_1(\alpha)\neq f_2(\alpha)$,即

$$\begin{cases}f_1(\alpha)=1,\\ f_2(\alpha)=0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f_1(\alpha)=0,\\ f_2(\alpha)=1,\end{cases}$$

这时有 $A_\alpha^{f_1(\alpha)}\cap A_\alpha^{f_2(\alpha)}=\varnothing$;又因 $A_\alpha^{f_1(\alpha)}\in F_{f_1}$, $A_\alpha^{f_2(\alpha)}\in F_{f_2}$,故 $F_{f_1}\neq F_{f_2}$.

既然 $\mathscr{F}$ 是单射,便有

$$2^{2^\omega}=|{}^{2^\omega}2|\leqslant|\beta\omega|.$$

另一方面,因 $|\mathscr{P}(\omega)|=2^\omega$, $|\mathscr{P}(a)|=|{}^a2|=2^{|a|}$,且 $\beta\omega\subset\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))$,故有

$$|\beta\omega|\leqslant 2^{2^\omega}.\qquad\square$$

ω 上超滤的全体形成了巨大的空间 $\beta\omega$,其中每一点代表着自然数性质的一种极大相容组合.$\beta\omega$ 作为 ω 的一种紧化(被称作 Stone-Čech 紧化)空间,其重要性已逐渐被越来越多的人认识.

第十一章　自然数——主算术超滤

最后让我们回到自然数.数学中,自然数是最稳定少变的概念之一,但和其他任何概念一样不是一成不变的,是变动的,发展的.

从远古时代起,人类便从具体事物中逐渐抽象出自然数的概念.这个从具体到抽象的过程十分漫长,最终由 Peano 于 19 世纪末期完成.Peano 总结了已有的前人关于自然数的丰富认识,由零与后继这两个原始概念出发,用公理形式对自然数的概念作出了科学的规定(见 1.2.3(三)).从此,整数、有理数、实数、复数以及更多的分析概念都有了可靠的支撑,它们能由自然数的概念出发一一演绎出来.与此同时,自然数也不断变换着自己的身份:特殊的整数,特殊的有理数,特殊的实数及各种空间中的特殊点.

Peano 理论的建立并不意味着自然数概念发展的终结.在 20 世纪初叶数学基础的学术运动中诞生的 ZFC 集论,从比自然数(逻辑上)更基本的集的概念出发,将自然数的抽象概念在它的框架内具体化(见 3.6.1).自然数概念的这种具体化是使 ZFC 系统成为数学主体的基础的一个重要因素.这一具体化之后,自然数在集论内又接连增加了自己新的精确化的身份:特殊的序数(见§8.1)与特殊的基数(见§10.1).

这里,我们讨论自然数另一种新的身份——特殊的算术超滤.

§11.1　再谈超滤

ω 的子集族 F 是 ω 上的超滤,指 F 满足(参见 4.4.1 定 1):

1°　$\varnothing\notin F,\omega\in F$.

2°　$a,b\in F\rightarrow a\cap b\in F$　(对交封闭).

3°　$(a\subset b\subset\omega$ 且 $a\in F)\rightarrow b\in F$　(大集性质).

4°　$\forall a\subset\omega(a\in F\vee(\omega-a)\in F)$　(极大性质).

实际上,为了验证 F 是否是超滤,只须验证 F 是否不含 $\varnothing$ 且具有性质 2°与 4°.

命题 1　若 ω 的子集族 F 若具有以下性质,则是 ω 上超滤:

(i) $\varnothing\notin F$.

(ii) $a,b\in F\rightarrow a\cap b\in F$　(对交封闭).

(iii) $\forall a\subset\omega(a\in F\vee(\omega-a)\in F)$ （极大性质）.

证 由(i)与(iii)即得 $\omega\in F$. 大集性质 3°是(i),(ii),(iii)的推论：设 $a\subset b\subset\omega$ 且 $a\in F$，则 $b\in F$. 事实上，若 $b\notin F$，则由(iii)知 $\omega-b\in F$，但 $a\cap(\omega-b)=\varnothing$，这与(i),(ii)矛盾. □

全体 ω 上超滤构成的集仍记作 $\beta\omega$.

设 $f\in{}^{\omega}\omega, a\subset\omega$. 按第三章中的符号规定，

$$f^{-1}[a]=\{x\in\omega\mid f(x)\in a\}\quad(a\text{ 的 }f\text{ 原像集}).$$

我们有(3.5.3 练习 4)：

$$f^{-1}[a\cup b]=f^{-1}[a]\cup f^{-1}[b],$$
$$f^{-1}[a\cap b]=f^{-1}[a]\cap f^{-1}[b],$$
$$f^{-1}[a-b]=f^{-1}[a]-f^{-1}[b],$$
$$f^{-1}[f[a]]\supset a,\quad f[f^{-1}[a]]\subset a.$$

以上这几个公式随时会用到.

命题 2(超滤变换) 设 $F\in\beta\omega, f\in{}^{\omega}\omega$，则由 f 与 F 用下面的方式得到的子集族 G 也是 ω 上超滤：

$$G=\{a\subset\omega\mid f^{-1}[a]\in F\}.$$

证 根据命题 1，只对 G 验证条件(i),(ii),(iii)成立.

(i) 因 $f^{-1}[\varnothing]=\varnothing\notin F$，故 $\varnothing\notin G$.

(ii) 设 $a,b\in G$. 因 $f^{-1}[a\cap b]=f^{-1}[a]\cap f^{-1}[b]\in F$，故 $a\cap b\in G$.

(iii) 任取 $a\subset\omega$. 若 $a\notin G$，即 $f^{-1}[a]\notin F$，则

$$f^{-1}[\omega-a]=\omega-f^{-1}[a]\in F,$$

故 $\omega-a\in G$. □

我们把命题 2 中的 G 叫做 F 在变换 f 之下的像，并将 G 写成 $f(F)$：

$$f(F)=\{a\subset\omega\mid f^{-1}[a]\in F\}\tag{1}$$

命题 2 告诉我们，每个 ω 上的一元运算 f 按(1)式确定了空间 $\beta\omega$ 上的一个一元运算——把一个超滤变成一个超滤. 我们仍用 f 表示 $\beta\omega$ 上的这个运算（一般情况下不会引起混淆）.

例 1 ω 上的恒等函数用 id 表示($\mathrm{id}(n)=n$). 因 $\mathrm{id}^{-1}[a]=a$，故 $\mathrm{id}(F)=F$.

回忆主超滤的概念. 每个自然数 n 都对应有自己的主超滤，现用 $\bar{n}$ 表示：

$$\bar{n}=\{a\subset\omega\mid n\in a\}.$$

显然有 $m\neq n\rightarrow\bar{m}\neq\bar{n}$.（例如 $\{m\}\in\bar{m}$，但 $m\neq n$ 时 $\{m\}\notin\bar{n}$.）

命题 3 设 $f\in{}^{\omega}\omega, n\in\omega$，则 $f(\bar{n})=\overline{f(n)}$（主超滤变换后仍为主超滤）.

证 $f(\bar{n})=\{a\subset\omega\mid f^{-1}[a]\in\bar{n}\}$

$$=\{a\subset\omega\mid n\in f^{-1}[a]\}$$

$$=\{a\subset\omega\mid f(n)\in a\}=\overline{f(n)}.$$

□

如果我们把自然数 $n\in\omega$ 与 n 所对应的主超滤 $\bar{n}$ 等同,那么 $\omega\subset\beta\omega$;这时命题 3 说明:由(1)式确定的 $\beta\omega$ 上的运算 f 是原运算从 ω 上到 $\beta\omega$ 上的扩张,二者在 ω 上是一致的.

在变换 f 之下,非主超滤 F 的像 $f(F)$ 不一定保持是非主超滤.(非主超滤即自由超滤,指不含有有限集的超滤.见 4.4.1.)

命题 4 设 $F\in\beta\omega$,f 是取常值 $m(\in\omega)$ 的函数(即 $\forall n\in\omega(f(n)=m)$),则有 $f(F)=\bar{m}$.

证 任取 $a\subset\omega$,有

$$f^{-1}[a]=\begin{cases}\omega, & m\in a,\\ \varnothing, & m\notin a.\end{cases}$$

于是 $f^{-1}[a]\in F\leftrightarrow m\in a$,且按主超滤 $\bar{m}$ 的定义,有

$$f(F)=\{a\subset\omega\mid f^{-1}[a]\in F\}=\{a\subset\omega\mid m\in a\}=\bar{m}.$$

□

§11.2 超滤空间 $\beta\omega$ 中的简单等式

离散的自然数空间 ω 与相应的超滤空间 $\beta\omega$ 这二者之间关系,是集论研究的重要课题.我们先来考虑下面的问题:在 $\beta\omega$ 中,等式

$$f(F)=g(F)\quad(F\in\beta\omega,f,g\in{}^{\omega}\omega)$$

成立的条件是什么?

命题 1 设 $f,g\in{}^{\omega}\omega$,$F\in\beta\omega$,则有

$$f=_F g\rightarrow f(F)=g(F).$$

证 设 $f=_F g$,即 $\{n\in\omega\mid f(n)=g(n)\}\in F$.反设 $f(F)\neq g(F)$,例如 $f(F)-g(F)\neq\varnothing$.这时存在 $b\in f(F)$ 而 $b\notin g(F)$,即 $f^{-1}[b]\in F$ 而 $g^{-1}[b]\notin F$,后者导致

$$g^{-1}[\omega-b]=\omega-g^{-1}[b]\in F\ (\text{按 } F \text{ 的极大性质}).$$

于是

$$f^{-1}[b]\cap g^{-1}[\omega-b]\cap\{n\in\omega\mid f(n)=g(n)\}\in F.$$

易见上式左端为 $\varnothing$,矛盾.

□

命题 1 给出了等式 $f(F)=g(F)$ 成立的必要条件——f 与 g 关于 F 几乎相等,即

$$\{n\in\omega\mid f(n)=g(n)\}\in F.$$

这个条件说明 $\beta\omega$ 中的"="与 ω 中的"="关系密切，似乎在 $\beta\omega$ 与 ω 之间可能有某种"保真性". 下面马上会看见，事情并不十分理想.

现问：命题 1 中蕴涵式的反方向是否成立？即问：是否总有

$$f(F)=g(F)\rightarrow f=_F g\ (F\in\beta\omega, f, g\in{}^{\omega}\omega)?$$

例 1　当 F 为主超滤 $\overline{m}$ 时，对任意 $f, g\in{}^{\omega}\omega$ 总有

$$f(\overline{m})=g(\overline{m})\rightarrow f=_{\overline{m}} g.$$

事实上，

$$\begin{aligned} f(\overline{m})=g(\overline{m}) &\rightarrow \overline{f(m)}=\overline{g(m)} \quad (\text{由 11.1 命题 3})\\ &\rightarrow f(m)=g(m) \quad (\text{由主超滤定义知 } i\neq k\rightarrow \overline{i}\neq\overline{k})\\ &\rightarrow m\in\{n\in\omega\mid f(n)=g(n)\}\\ &\rightarrow \{n\in\omega\mid f(n)=g(n)\}\in\overline{m}, \end{aligned}$$

即 $f=_{\overline{m}} g$.

可惜，例 1 中的蕴涵式对一般超滤不总成立(见下面例 2).

例 2　存在超滤 H 及 $f, g\in{}^{\omega}\omega$ 使 $f(H)=g(H)$，但 $f\neq_H g$. 为证明此事，先任取一非主超滤 F，并定义 $f, g\in{}^{\omega}\omega$ 如下：

令 $f(2^i3^j)=i$，当 n 形非 2^i3^j 时，令 $f(n)=0$；

令 $g(2^i3^j)=j$，当 n 形非 2^i3^j 时，令 $g(n)=0$.

作 ω 的子集族 G：

$$G=\{f^{-1}[a]\mid a\in F\}\cup\{g^{-1}[a]\mid a\in F\}\cup\{\{x\in\omega\mid f(x)\neq g(x)\}\}.$$

现来证明 G 具有有限交性质，即 G 中任意有限个成员之交非空. 事实上，任取 $a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n\in F$，记 $a=a_1\cap\cdots\cap a_m\cap b_1\cap\cdots\cap b_n(\in F)$，则有

$$f^{-1}[a_1]\cap\cdots\cap f^{-1}[a_m]\cap g^{-1}[b_1]\cap\cdots\cap g^{-1}[b_n]\cap\{x\in\omega\mid f(x)\neq g(x)\}$$
$$\supset f^{-1}[a]\cap g^{-1}[a]\cap\{x\in\omega\mid f(x)\neq g(x)\};$$

因 F 是非主超滤，故 a 是无限集，可取出 $i, j\in a$ 且 $i\neq j$；此时有

$$2^i3^j\in f^{-1}[a]\cap g^{-1}[a]\cap\{x\in\omega\mid f(x)\neq g(x)\}.$$

这就证明了 G 具有有限交性质. 将 G 扩张成超滤 H(利用 §9.4 中的扩张原则)，我们有 $f(H)=g(H)=F$. 事实上，

$$\begin{aligned} a\in F &\rightarrow f^{-1}[a]\in H\wedge g^{-1}[a]\in H \quad (\text{因 } G\subset H)\\ &\rightarrow a\in f(H)\wedge a\in g(H), \end{aligned}$$

这说明 $F\subset f(H)$ 且 $F\subset g(H)$. 因超滤 F 是极大滤子，故 $F=f(H)=g(H)$. 与此同时，我们还有 $f\neq_H g$，这是因为 $\{x\in\omega\mid f(x)\neq g(x)\}\in H$.

§11.3 算术超滤

上面我们看见，对一般的 $F\in\beta\omega$，等式 $f(F)=g(F)$ 并不意味着 $f=_F g$，尽管 $f=_F g$ 蕴涵 $f(F)=g(F)$. 这引起我们对空间 $\beta\omega$ 中一类特殊点的注意.

定义 1(算术超滤(arithmetical ultrafilter)) ω 上超滤 F 如果满足下面的条件(*)，则叫做算术超滤：

$$f(F)=g(F)\leftrightarrow f=_F g, \qquad (*)$$

其中 $f=_F g$ 指 $\{n\in\omega \mid f(n)=g(n)\}\in F$.

11.2 例 1 指出，主超滤是算术超滤；11.2 例 2 指出，并非每个超滤都是算术超滤. 我们发现[87]每个非主算术超滤 F 都联系着一个算术模型 $^*\mathbf{N}$:

$$^*\mathbf{N}=\{f(F)\mid f\in{}^{\omega}\omega\}.$$

至今所见的非 $\mathbf{N}$ 算术模型中，这里的 $^*\mathbf{N}$ 是最简单、最自然、最具体的.

下面讨论与某个固定的非主算术超滤 F 相联系的 $^*\mathbf{N}$.

一、$^*\mathbf{N}$ 的运算

$^*\mathbf{N}$ 中的加与乘的定义是：

$$f(F)+g(F)=(f+g)(F),$$
$$f(F)\cdot g(F)=(f\cdot g)(F),$$

其中 $f+g$ 与 $f\cdot g$ 按通常意义理解：

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n),$$
$$(f\cdot g)(n)=f(n)\cdot g(n).$$

此外，每个 $h\in{}^{\omega}\omega$ 对应着 $^*\mathbf{N}$ 上的一个一元运算(仍用 h 表示)：

$$h(f(F))=(h\circ f)(F).$$

若 f 是取常值 0 的函数，则对任一 $F\in\beta\omega$，由 11.1 命题 4 知 $f(F)=\overline{0}$.

现在我们有了结构

$$\langle {}^*\mathbf{N},\overline{0},+,\cdot,f,g,h,\cdots\rangle,$$

它的语言是 $\mathscr{L}=\{0,+,\cdot,f,g,h,\cdots\}$，$\mathscr{L}$ 中包含所有一元自然数函数符.

二、$\mathbf{N}$ 同构嵌入 $^*\mathbf{N}$

设 f 是取常值 $m\in\omega$ 的函数：$\forall n\in\omega(f(n)=m)$. 由 11.1 命题 4 知 $f(F)=\overline{m}$. 这说明每个主超滤都属于 $^*\mathbf{N}$.

我们把嵌入映射 $H:\mathbf{N}\to{}^*\mathbf{N}$ 定义为 $H(n)=\overline{n}$.

令 $\overline{\mathbf{N}}=\{\overline{n}\mid n\in\mathbf{N}\}\subset{}^*\mathbf{N}$. $\overline{\mathbf{N}}$ 关于 $^*\mathbf{N}$ 中的运算是封闭的：

$\overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}$　（设 $\overline{m}=f(F),\overline{n}=g(F),f$ 与 g 分别取常值 m 与 n）.

$\overline{m}\cdot\overline{n}=\overline{m\cdot n}$.

$f(\overline{n})=\overline{f(n)}$　（11.1 命题 3）.

以上各式说明 H 是 $\mathbf{N}$ 到 $\overline{\mathbf{N}}$ 的同构映射.若把每个 $n\in\mathbf{N}$ 与相应于 n 的主超滤 $\overline{n}$ 等同，则 $\mathbf{N}\subset{}^*\mathbf{N}$.这样一来，每个自然数函数 $f\in{}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ 都自然地扩张成 ${}^*\mathbf{N}$ 到 ${}^*\mathbf{N}$ 的函数.

三、${}^*\mathbf{N}$ 对 $\mathbf{N}$ 的保真性

在语言 $\mathscr{L}$ 中加进一个新常元 F：

$$\mathscr{L}\cup\{F\}=\{F,0,+,\cdot,f,g,h,\cdots\}.$$

算术超滤定义中的（*）式

$$f(F)=g(F)\leftrightarrow f=_F g,$$

意味着关于 ${}^*\mathbf{N}$ 的一个（新语言的）简单语句（即等式）具有对 $\mathbf{N}$ 的保真性.更进一步，我们有：

定理 1（转换原理 transfer）对任何 $\mathscr{L}\cup\{F\}$-语句 $\varphi(F)$，

$$\varphi(F)\text{在}{}^*\mathbf{N}\text{中为真}\leftrightarrow\{n\in\omega\mid\varphi(n)(\text{在}\mathbf{N}\text{中为真})\}\in F.\qquad(1)$$

特别，对任何 $\mathscr{L}$-语句 φ（φ 中不含 F），

$$\varphi\text{ 在}{}^*\mathbf{N}\text{中为真}\leftrightarrow\varphi\text{ 在}\mathbf{N}\text{中为真}.$$

证　为证(1)，现对语句 $\varphi(F)$ 中 $\neg,\wedge,\exists$ 出现的总次数 k 归纳.

$k=0$ 时，$\varphi(F)$ 为原子公式——等式，可设 $\varphi(F)$ 为 $f(F)=g(F)$.此时要证的(1)式就是算术超滤 F 所具有的性质（*）.

$k>0$ 时，$\varphi(F)$ 是复合句，要分以下三种情形讨论.

情形 1，$\varphi(F)$ 为 $\varphi_1(F)\wedge\varphi_2(F)$，这时有

$\varphi_1(F)\wedge\varphi_2(F)$ 在 ${}^*\mathbf{N}$ 中为真 $\leftrightarrow\varphi_1(F)$ 与 $\varphi_2(F)$ 皆在 ${}^*\mathbf{N}$ 中为真　（$\wedge$ 的性质）

$\leftrightarrow\{n\in\omega\mid\varphi_1(n)\}\in F$ 且 $\{n\in\omega\mid\varphi_2(n)\}\in F$　（归纳假设）

$\leftrightarrow\{n\in\omega\mid\varphi_1(n)\}\cap\{n\in\omega\mid\varphi_2(n)\}\in F$　（F 对交封闭）

$\leftrightarrow\{n\in\omega\mid\varphi_1(n)\wedge\varphi_2(n)\}\in F.$

情形 2，$\varphi(F)$ 为 $\neg\psi(F)$，这时有

$\neg\psi(F)$ 在 ${}^*\mathbf{N}$ 中为真 $\leftrightarrow\psi(F)\,{}^*\mathbf{N}$ 中为假　（$\neg$ 的性质）

$\leftrightarrow\{n\in\omega\mid\psi(n)\}\notin F$　（归纳假设）

$$\leftrightarrow \omega - \{n\in\omega \mid \psi(n)\}\in F \quad (F\text{ 的极大性质})$$
$$\leftrightarrow \{n\in\omega \mid \neg\psi(n)\}\in F.$$

情形 3，$\varphi(F)$为$\exists x\psi(x,F)$，这时把(1)式分为两个蕴涵式证明.

$(\rightarrow)$

$\exists x\psi(x,F)$在$^*\mathbf{N}$中为真→存在$f(F)\in{}^*\mathbf{N}$使$\psi(f(F),F)$在$^*\mathbf{N}$中为真(存在量词的性质)

$$\rightarrow \{n\in\omega \mid \psi(f(n),n)\}\in F \quad (\text{归纳假设})$$
$$\rightarrow \{n\in\omega \mid \exists x\psi(x,n)\}\in F,$$

上面最后一步的理由是：因下式

$$\psi(f(n),n)\rightarrow \exists x\psi(x,n)$$

在$\mathbf{N}$中恒真(存在量词的性质)，故

$$\{n\in\omega \mid \psi(f(n),n)\}\subset\{n\in\omega \mid \exists x\psi(x,n)\}.$$

$(\leftarrow)$ 作函数$g:\omega\rightarrow\omega$，$g$由下式定义：

$$g(n)=\begin{cases}0, & \exists x\psi(x,n)\text{ 在 }\mathbf{N}\text{ 中为假,}\\ m, & m\text{ 是使 }\psi(x,n)\text{ 在 }\mathbf{N}\text{ 中为真的最小 }x.\end{cases}$$

按g的定义，对任何$n\in\omega$，下式在$\mathbf{N}$中恒真：

$$\exists x\psi(x,n)\rightarrow\psi(g(n),n).$$

由此式可得

$$\{n\in\omega \mid \exists x\psi(x,n)\}\subset\{n\in\omega \mid \psi(g(n),n)\},$$

于是有

$$\{n\in\omega \mid \exists x\psi(x,n)\}\in F\rightarrow\{n\in\omega \mid \psi(g(n),n)\}\in F \quad (\text{滤子的大集性质})$$
$$\rightarrow \psi(g(F),F)\text{在}^*\mathbf{N}\text{中为真} \quad (\text{归纳假设})$$
$$\rightarrow \exists x\psi(x,F)\text{在}^*\mathbf{N}\text{中为真} \quad (\text{存在量词性质}).$$

(1)式的归纳证明完成. □

由非主算术超滤F生成的$^*\mathbf{N}$作为不可数语言$\mathscr{L}$的一种算术模型，它可用来构造实数(参见§4.5～§4.7)，构造的方法是自然的：如同从$\mathbf{N}$出发用分数的等价类来定义有理数，我们从$^*\mathbf{N}$出发用有限分数的等价类来定义实数.

不仅如此，这种非$\mathbf{N}$的保真算术模型$^*\mathbf{N}$作为超滤空间$\beta\omega$的子空间，很有希望成为集论拓扑与数论之间的一条便捷通道.很清楚：对$^*\mathbf{N}$的任何新认识都会加深我们对自然数的认识，犹如复数与实数的关系那样.

仅仅基于 ZFC，非主算术超滤是否绝对存在目前尚属未知；但“非主算术超滤存在”作为一条集论假设，已被证明相对于 ZFC 是安全的[87].

前面(4.4.1 中)曾谈到，自然数的每个子集相应于自然数的某种性质(或

关系). ω 上超滤作为 ω 的子集族,则相应于自然数性质的某种极大相容组合.

算术超滤——包括与自然数视为等同的主算术超滤——作为一种数学存在,本质上是它所具有的自然数性质(关系)的总和.

第十二章　结　束　语

一、理论基础与实践

数学是从量的方面认识世界的科学.数学的真理性最终要接受实践的检验,或者说,人类的实践是数学的最终基础.

尽管数学的发展在根本上由实践决定,但数学与实践的关系又很复杂.并非具体的数学活动都一一与现实世界直接有关,相反,各种数学活动常常与现实事物有很远距离.数学服务于人类实践,大量的服务是间接的,要通过向中介科学提供工具的方式来实现.实践基础不能代替自身的理论基础.这一点与其他科学相比,数学表现得最为突出.

为了进行纯粹形态的量的观察,数学要把具体事物的质尽可能地抛在一边.这一本质特征,形成了今日数学特有的高度抽象的知识体系及错综复杂的内部结构;决定了数学要比别的科学更多地依靠逻辑,更加注重寻找可靠的理论立足点,从而保证数学的确定性,精确性和应用的广泛性:无可怀疑,不容争辩且处处有用武之地.

在数学发展的过程中,特别在它急剧变动时期,会出现对它确定性的怀疑与挑战.数学在靠成功的应用为自己开辟前进道路的同时,总能靠自身的理论反思,靠发展并完善自己的理论基础去回答挑战.

数学需要理论基础,更离不开实践基础.割断数学与实践的联系,则难以解释:从集论可能推演出的无数种结构中,何以只有少数那几种结构获得了重要地位;从集论可能推出的一切可能结果中,何以只选择了正好是今日数学的那些结果;用集论可以定义的概念中,何以一些概念比其他概念更有趣;最后,抽象数学何以能有效应用.形形色色的数学理论的盛衰最终由人类实践决定.

数学的理论基础决定了数学生存与发展的形式,而人类实践最终维系着数学的生命.

二、数学何故选择集论为理论基础?

集论从诞生到形成公理体系自然而然地成为数学主体的理论基础,其间不足半个世纪.数学选择了集论,理由大体如下.

1. 集论的创立看似 Cantor 一人的成就,实则是时代的产物.不早不晚,集

论诞生于古典分析的顶峰期.把实无限作为自己研究对象的集论,正合乎分析数学精确地表现运动与变化的需要.

2. 集论中的外延公理清楚地表明,就数学从量的角度研究事物的这一本质特征而言,集论为数学提供了极为合适的框架.

3. 历史地看,数学基础从形转向数,又从数转向集,从而使数学达到了高一级的统一.正如 P.R.Halmos 所说,集论"可能被证明是数学史上最强有力的一个统一理论"[88].选择了集论,是数学发展到更高层次的合乎逻辑的必然结果.

4. Cantor 的"集论乐园"为数学提供了巨大的发展空间.事实上,这是数学的一次解放:集论在确立了它的基础地位之后,为数学带来了规模空前的大发展.以集论为依托,新兴的大小数学分支纷纷涌现,它们是在与数学原有的主要分支相互影响、相互促进、相互融合的基础上形成的.这是壮观的 20 世纪数学,它对科学与人类社会所起的作用难以估量.

5. 与现代逻辑紧密相连的集论始终在发展自己,不断完善自己作为基础的地位;在使自己成为数学的一个重要分支的同时,源源不断地为数学提供新概念,新思想,新方法.

6. 最后,数学选择集论的一个重要原因是:集论的基本概念与方法易于直观想象,易于传播普及且便于应用.从最初等的一般教育到最高级的专业研究,各种水平的集论一应俱全,短期内别样理论难以与之竞争.

ZFC 集论成了数学主体的基础,是在下面的意义上说的:现代数学基本理论的各主要分支都可由 ZFC 集论出发来展开自己的理论——基本概念最终归为集,基本结论最终来源于 ZFC 公理,理论展开的方式大体上限于 ZFC 体系的逻辑框架.

ZFC 为数学建起的舞台——集宇宙 V 有巨大的容量.例如,每个群皆同构于 V 中的一个群,每个拓扑空间皆同胚于 V 中的一个拓扑空间,等等(参见[89])."目前,属于'主流'的绝大多数数学结果只用到 Zermelo-Fraenkel 公理从而完全与另外的公理的选取无关."[90]

三、集论新假设

ZFC 系统不完备性的第一个重要例证是连续统问题:连续统假设"ZFC 不可判定",即该假设与其否定都不是 ZFC 的定理.(关于连续统理论可参见[89],[91]~[94]).连续统假设是不是惟一的独立于 ZFC 的问题呢? 不是.不仅在集论范围内,而且在其他各个数学领域的前沿,现已发现了越来越多的问题是独立于 ZFC 的.例如,可换群论中的 Whitehead 问题,关于 Banach 空间

的 Pelczynski 猜想,关于 Banach 代数的 Kaplansky 问题,等等.集论拓扑中的独立性问题更多.这类问题是数学研究中自然提出的问题,当它们相对于 ZFC 的独立性被证明之后,人们才知道用通常的数学方法不能决定它们的真假.对这一现象,王世强先生曾作过如下描述[95]:

“更形象地说:公理集合论的现代成果正在引起一些其他数学分支的‘局部地震’,并且势将引起越来越多的‘地震’.这正像数学史上非欧几何的出现一样,但其影响的深度及规模将更大.可以预料,今后会有越来越多的数学家将不得不去采纳一些新的集合论假设来帮助解决问题.”

ZFC 的不完备性促使人们提出并研究新的集论假设.下面选择其中一些作简要介绍.

(一) 可构成公理

Gödel 为研究连续统问题,引进了内模型的方法.他利用基本集运算递归定义出可构成集,然后引进了可构成公理.

可构成公理 所有集都是可构成集.

通常把可构成集的全体记 $\mathbf{L}$.可构成公理可写作 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$.

Gödel 证明了可构成公理相对于 ZF 是无矛盾的.进而他证明了选择公理与连续统假设在 $\mathbf{L}$ 中为真,从而相对于 ZF 也是无矛盾的.

过了 20 多年,Cohen 利用力迫法证明了连续统假设的独立性.此后,Gödel 的方法又重新引起了人们的兴趣.R. Jensen 等对可构成集宇宙 $\mathbf{L}$ 进行了深入的探索,取得的成果对集论研究产生了重要影响.

在通常数学中,可构成公理与连续统假设一般并不被当作公理使用;但在集论中,可以拿它们作为出发点展开一种理论.这种理论是有意义的,因为这是从理想化的角度对集宇宙的一种观察.如果从这个角度延伸观察现实世界,那么这相当于一种十分简单化的观察:物质存在被分成截然不同的两种形式——离散的存在与连续的存在,而在这二者之间不存在任何形式的中间地带.

(二) 大基数公理

ZFC 中,断言归纳集存在的无限公理让集论进入超穷领域.这使集论不仅成功地被用于表现经典数学,也带来了现代数学的发展.但是尽管有无限公理,ZFC 还是不够用.于是人们把眼光投向了更强的无限公理——大基数公理,即断言某种大基数存在的公理.

首先注意自然数集 ω 具有的两条性质:

1. 任一 $n(\in\omega)$与 ω 不共尾(即从 n 到 ω 不存在无界映射),

2. 对任一 $n(\in\omega)$皆有 $2^n\in\omega$.

这两条性质说明 ω 比小于 ω 的基数要大得很多很多.

自然要问:是否存在不可数的极限基数,它比小于它的基数大得很多很多?具体地说,设该基数是 κ,看它是否可能具有性质:

1. $\lambda<\kappa$ 时 λ 与 κ 不会共尾,

2. $\lambda<\kappa$ 时 $2^{\lambda}<\kappa$.

不可数的极限基数 κ 若具有上面的性质 1,则叫做弱不可达基数;同时具有性质 1 与 2,则叫做强不可达基数(见 §10.3 定义 3,4). 问题是:不可达基数是否存在?

§10.3 命题 7 指出,若 ω_{α} 是弱不可达基数,则有 $\omega_{\alpha}=\alpha$. 这个 α(即 ω_{α})是很大的:

$$\alpha=\omega_{\alpha}=\omega_{\omega_{\alpha}}=\omega_{\omega_{\omega_{\alpha}}}=\cdots$$

但具有性质 $\omega_{\alpha}=\alpha$ 的基数 α 尽管很大,还不一定是不可达基数. 例如,设 $\kappa_0=\omega$, $\kappa_{n+1}=\omega_{\kappa_n}$,且设 $\kappa=\bigcup_{n\in\omega}\kappa_n$,这时易知有 $\kappa=\omega_{\kappa}$. ω 与 ω_{κ} 共尾,这是因为由 $f(n)=\kappa_n$ 定义的映射 $f:\omega\to\kappa$ 在 κ 中是无界的. 此例中的 κ 是具有性质 $\omega_{\kappa}=\kappa$ 的基数中的最小者,它尽管很大,但不是弱不可达基数. 这说明不可达基数大得十分惊人.

直观上,没有理由认为只有自然数才具有上面谈到的两条性质,人们似乎有理由指望不可达基数是存在的. 但事实上,在 ZFC 中证明不了不可达基数的存在性;若假设强不可达基数存在,则可证明 ZFC 是无矛盾的. [96]

除了不可达基数,人们还研究了更多种类的大基数,这些大基数也都具有 ω 的某种性质,它们形成了谱系,其中一个比一个大得惊人. 研究这些大基数的性质、关系及应用,构成了集论的重要领域.

(三) Martin 公理

如果不相信连续统假设是真的,那么自然要问,界于 ω 与 2^{ω} 之间的基数性质如何? 例如,对于 $\omega<\kappa<2^{\omega}$,可以问:

1. 是否有 $2^{\kappa}=2^{\omega}$?

2. **R** 的 κ 个零 Lebesgue 测度子集之并是否测度仍为 0?

3. **R** 的 κ 个第一纲子集之并是否仍为第一纲子集?

当 $\kappa=\omega$ 时,上面问题的回答都是肯定的;而当 $\omega<\kappa<2^{\omega}$ 时,上面问题无一能在 ZFC 中得到回答. 下面介绍的 Martin 公理对这类问题都给出了肯定的回答.

Martin 公理通常是用偏序形式表述的. 它形式上难于理解,但使用灵活.

设 $\langle P,<\rangle$ 是偏序结构,$P\neq\varnothing$. P 的子集 a 是 P 的反链,指 a 中任意二元素都不相容,即

$$\forall x,y\in a(x\neq y\rightarrow\neg\exists z\in P(z\leqslant x\wedge z\leqslant y)).$$

P 满足可数反链条件(简记为 $c.c.c.$),指 P 中任一反链都是至多可数集. P 的子集 d 是 P 的稠子集,指

$$\forall x\in P\quad\exists y\in d(y\leqslant x).$$

P 的子集 G 若满足:

(i) G 的元素两两在 G 中相容,即

$$\forall x,y\in G\ \exists z\in G(z\leqslant x\wedge z\leqslant y)$$

(ii) $\forall x\in G\,\forall y\in P(x\leqslant y\rightarrow y\in G)$,

则 G 叫做 P 的滤子.

Martin 公理 *设非空偏序集 P 满足可数反链条件, D 是 P 的稠子集族,且 $|D|<2^{\omega}$,则存在 P 的滤子 G 与 D 的所有成员相交:*

$$\forall d\in D(d\cap G\neq\varnothing).$$

Martin 公理本身独立于 ZFC. 它缺少作为公理的自明性,但有广泛应用,特别是常用于证明独立性的结果. 例如,利用 Martin 公理可以证明非主算术超滤存在,从而知道后一结论相对于 ZFC 是无矛盾的[97].

各种集论的新假设及应用正在被大量地研究这一事实说明作为数学基础的集论仍在变化发展之中.

不存在不变的数学基础. 一个时期合适的基础,到时候会变得不合适. 现今的集论不会例外:最终必然会出现比它更合适的基础.

关于未来的数学基础,可以有以下设想.

1. 新基础能更好地表现数学从量的角度研究现实世界变化与发展的这一本质特征,使数学与现实世界的联系更加紧密;

2. 新基础也使不同数学分支之间以及不同数学结构之间的联系更加紧密,从而使未来数学在新的基础上达到更高水平的统一;

3. 新基础依傍逻辑的重大进展,更适合未来数学的发展,有比集论更强的认识、分析与解决问题(例如连续统问题之类)的方法与能力;

4. 新基础对旧基础的替代不是将后者彻底推翻,而是包容——能兼收并蓄集论所积累的全部积极成果;

5. 新旧基础的交替过程伴随着矛盾和斗争,当条件成熟时,新的理论会首先为当时新一代数学家所熟悉.

20 世纪中叶出现了范畴论(它不以集之间的归属关系为基本概念,而代之以映射的复合关系为基本概念). 按这种理论的目标与已有的进展(参见[98]),它很可能成为未来数学基础的有力竞争者.

练习题与思考题提示或解答

1.2 附 3 思考题 1

缺少 PA1,可以有 $\mathbf{N}=\varnothing$.

缺少 PA2,或 PA3,可以有 $\mathbf{N}=\{0\}$.

缺少 PA4,可以有 $\mathbf{N}=\{0,0',0''\}$,其中 $0'$ 与 $0''$ 互为后继:$0\to 0'\leftrightarrows 0''$.

缺少 PA5,$\mathbf{N}$ 可以有下面的形象:

$$0,0',0'',\cdots,\omega,\omega',\omega'',\cdots,$$

其中 ω 可取为任一不同于 0 的新数.

1.2 附 3 思考题 2

Peano 公理所定义的自然数集 $\mathbf{N}$ 是惟一的.设另有集 $\overline{\mathbf{N}}$ 也满足 Peano 公理,则令 $M=\mathbf{N}\cap\overline{\mathbf{N}}$.于是

1° $0\in M$(这里因为 $0\in\mathbf{N}$ 且 $0\in\overline{\mathbf{N}}$),

2° 设 $x\in M$,则 $x\in\mathbf{N}$ 且 $x\in\overline{\mathbf{N}}$.由 PA2 知 $x'\in\mathbf{N}$,$x'\in\overline{\mathbf{N}}$.故有 $x'\in M$.

由 1°,2°用 PA5 两次(一次对 $\mathbf{N}$,一次对 $\overline{\mathbf{N}}$),得 $M=\mathbf{N}=\overline{\mathbf{N}}$.

1.2 附 3 思考题 3 定理 20 的证明中没有直接用条件 1°.事实上条件 1°可以省去,因为 2°⇒1°:如果 2°成立,那么 $p(0)$ 自动成立;这是因为"$k<0$ 时 $p(k)$ 都成立"是当然的.

把条件 1°单独写出来,是强调归纳过程(验证 2°)的第一步必须要单独验证 $p(0)$ 成立.($m=0$ 时,没有归纳假设可用.)

2.1.1 练习 1 一元真函数有四个(参见 2.1.4 定理 1 证明).二元真值函数共 16 个,列表如下(其中对应于"不可兼或"的是 f_{10}).

p	q	f_1	$f_2(\vee)$	f_3	f_4	$f_5(\to)$	f_6	$f_7(\leftrightarrow)$	$f_8(\wedge)$	f_9	$f_{10}(\overline{\vee})$	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

2.1.1 练习 2

(1) $(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$,

$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$,

$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(p\vee q))$.

(2) $(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(p\rightarrow\neg q)$,

$(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\rightarrow q)$,

$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$.

2.1.2 练习 1 (1),(4),(5)是永真式.

2.1.3 练习 1 (1),(2),(5),(6),(7),(10)是永真式.

2.1.3 练习 2 正确.

2.1.3 练习 3 不合理.

2.1.3 练习 4 n 奇数时.

2.2.2 练习 1

1° Γ 有矛盾,即存在公式 q 使 $\Gamma\vdash q$ 与 $\neg q$. 于是对任一公式 p,存在着 p 从 Γ 的证明:

$$\cdots,q,\cdots,\neg q,\neg q\rightarrow(q\rightarrow p)(\text{永真式}),q\rightarrow p,p.$$

上面证明的最后两步是由前面的公式用分离规则写出的.

2° 从 $\Gamma\vdash p\rightarrow q$ 证明 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 比较简单,用分离规则由 p 与 $p\rightarrow q$ 便可写出 q.

反过来,设 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$. 于是有 q 从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的证明 $q,\cdots,q_n(=q)$. 我们对这个证明的长度 n 归纳证明 $\Gamma\vdash p\rightarrow q_n$(即 $\Gamma\vdash p\rightarrow q$,这是要达到的目的).

$n=1$ 时,只有三种可能:q 是公理,或 $q\in\Gamma$,或 q 就是 p. 当 q 是公理或 $q\in\Gamma$ 时,由 q 及永真式 $q\rightarrow(p\rightarrow q)$ 用分离规则即得 $p\rightarrow q$. 当 q 就是 p 时,$p\rightarrow q$ 是永真式.

$n>1$ 时,有几种可能:q 是公理,或 $q\in\Gamma$,或 q 就是 p,或 q 由于使用推理规则而得. 前三种情形与 $n=1$ 时的三种情形同样处理,只用讨论以下情形.

(i) q(即 q_n)由分离规则得到,即有 $i,j<n$ 使 $q_j=q_i\rightarrow q$. 由归纳假设,我们有

$$\Gamma\vdash p\rightarrow q_i \text{及} \Gamma\vdash p\rightarrow q_j(\text{即} p\rightarrow(q_i\rightarrow q)).$$

再由永真式 $(p\rightarrow(q_i\rightarrow q))\rightarrow((p\rightarrow q_i)\rightarrow(p\rightarrow q))$ 两次用分离规则分离出 $p\rightarrow q$.

(ii) q 由推广得到,即 q 为 $\forall xq_j$, $j<n$. 由归纳假设,有 $\Gamma\vdash p\rightarrow q_j$. 由此用一次推广规则写出 $\forall x(p\rightarrow q_j)$. 再写出量词公理

$\forall x(p\rightarrow q_j)\rightarrow(p\rightarrow\forall xq_j)$, (注意因 p 是语句,故 x 不在 p 中自由出现)

最后用一次分离规则得 $p\rightarrow\forall xq_j$,此即所需要的 $p\rightarrow q$.

3° 由已知 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$ 及 $\neg q$ 和永真式 $\neg q\to(q\to p)$ 便得

$$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash p.$$

由此用 2°中演绎定理得 $\Gamma\vdash\neg p\to p$. 再写出永真式 $(\neg p\to p)\to p$, 用一次分离规则便知 $\Gamma\vdash p$.

4° 由已知 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 及 $\neg q$ 和永真式 $\neg\neg p\to p$ 便知

$$\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash q \text{ 及 } \neg q,$$

由此用 3°中反证律便得 $\Gamma\vdash\neg q$.

关于反证律与归谬律差别的说明

从形式上看,反证律是将待证公式先否定,把否定的待证公式作为新假定,若推出矛盾,则肯定这个待证公式;归谬律是将待证的否定式先肯定,去掉前边的否定号后作为新假定,若推出矛盾,则证明了原来的否定式. 前者常用来证明肯定式,后者常用来证明否定式. 对于我们的系统,反证律与归谬律的差别是不重要的. 但对于其他某些系统,它们的差别是本质的;在这些系统中,不承认永真式都是合理的,特别是不承认双重否定律 $\neg\neg p\to p$(等价于排中律 $\neg p\lor p$)的合理性. (详见[67].)

5° 用 4°的归谬律来证明. 先注意以下公式从 $\{\forall xp, \forall x\neg p\}$ 可证:

$$\forall xp, \forall x\neg p, \forall xp\to p, \forall x\neg p\to\neg p, p, \neg p.$$

上面第三、四步是量词公理,后两步用分离规则写出. 现可用归谬律得

$$\{\forall xp\}\vdash\neg\forall x\neg p, \text{此即} \exists x\, p.$$

6° 用永真式 $(p\leftrightarrow q)\to(\neg p\leftrightarrow\neg q)$.

7° 用永真式

$$(p\leftrightarrow q)\to((r\leftrightarrow s)\to((p\land r)\leftrightarrow(q\land s))),$$
$$(p\leftrightarrow q)\to((r\leftrightarrow s)\to((p\lor r)\leftrightarrow(q\lor s))).$$

8° 考虑对称性,先证 $\vdash\forall xp\to\forall xq$. 下面是 $\forall xq$ 从 $\forall xp$ 的证明: $\forall xp, \forall xp\to p$ (量词公理), $p, p\to((p\leftrightarrow q)\to q)$ (永真式), $(p\leftrightarrow q)\to q, (p\leftrightarrow q)$ (已知), $q, \forall xq$ (推广规则).

利用永真式 $(p\leftrightarrow q)\to(\neg p\leftrightarrow\neg q)$ 及 6°进而可得 $\vdash\exists xp\leftrightarrow\exists xq$.

2.2.2 练习 2 以下题号的公式不是谓词演算的定理.

7° $p(x)$ 取为 $x^2=x$, c 取为 1, 论域为自然数集.

9° R 取为实数中的"$<$".

10° 同 9°中例.

12° R 取为自然数中的"$=$".

14° 从右向左的蕴涵是不正确的. 例如自然数中取 $p(x)$ 为 $5<x$, 取 $q(x)$ 为 $x<4$. (如果 $p(x)$ 或 $q(x)$ 中 x 不自由出现, 则此题的公式恒真.)

15° 从左向右的蕴涵是不正确的. 例如自然数中取 $p(x)$ 为 $5<x$, 取 $q(x)$ 为 $x\leqslant 5$. (如果 $p(x)$ 或 $q(x)$ 中 x 不自由出现, 则此题的公式恒真.)

17° 从右向左的蕴涵是不正确的. 例如自然数中取 $p(x)$ 为 $x>5$, 取 $q(x)$ 为 $x=6$.

2.2.2 练习 3 对 p 中 $\neg, \wedge, \vee, \forall$ 与 $\exists$ 出现的次数 n 归纳证明 $\vdash p^*\leftrightarrow \neg p$.

$n=0$ 时, p 是原子公式; 按 p^* 的定义, p^* 就是 $\neg p$.

$n>0$ 时, p 有五种可能形式: $\neg q, q\vee r, q\wedge r, \forall xq, \exists xq$. 由归纳假设, 总有 $\vdash q^*\leftrightarrow\neg q$, $\vdash r^*\leftrightarrow\neg r$. 对五种可能分别讨论如下.

(i) p 为 $\neg q$ 时, p^* 为 $\neg q^*$. 由 $\vdash q^*\leftrightarrow\neg q$ 用归纳假设及练习 1(6°) 即得 $\vdash\neg q^*\leftrightarrow\neg\neg q$, 此即 $\vdash p^*\leftrightarrow\neg p$.

(ii) p 为 $q\vee r$ 时, p^* 为 $q^*\wedge r^*$ 由归纳假设及练习 1(7°) 可得

$$\vdash (q^*\wedge r^*)\leftrightarrow(\neg q\wedge\neg r),$$

再用 De Morgan 律便得

$$\vdash (q^*\wedge r^*)\leftrightarrow\neg(q\vee r),\text{此即}\vdash p^*\leftrightarrow\neg p.$$

(iii) p 为 $q\wedge r$ 时, 证明类似于 (ii).

(iv) p 为 $\forall xq$ 时, p^* 为 $\exists xq^*$. 此时有

$\vdash\exists xq^*\leftrightarrow\exists x\neg q$ (归纳假设及练习 1(8°))

$\vdash\exists xq^*\leftrightarrow\neg\forall x\neg\neg q$ (此即上式)

$\vdash\neg\forall x\neg\neg q\leftrightarrow\neg\forall xq$ (由永真式 $\neg\neg q\leftrightarrow q$ 及练习 1(8°), 1(6°))

$\vdash\exists xq^*\leftrightarrow\neg\forall xq$ (由上两式及永真式 $(p\leftrightarrow q)\to((q\leftrightarrow r)\to(p\leftrightarrow r))$)

此即 $p^*\leftrightarrow\neg p$.

(v) p 为 $\exists xq$ 时, 证明类似于 (iv).

2.2.2 练习 4 反设 Γ_1 有矛盾. 由反证律得

$$\Gamma\vdash\neg(\exists xp(x)\to p(c)).$$

由此注意永真式 $\neg(s\to q)\to s$ 及 $\neg(s\to q)\to\neg q$ (其中取 s 为 $\exists xp(x)$, 取 q 为 $p(c)$), 可得

$$\Gamma\vdash\exists xp(x)\quad\text{及}\ \Gamma\vdash\neg p(c).$$

于是以下公式从 Γ 可证:

(1) $\exists xp(x)$,

(2) $\neg p(c)$,

(3) $\neg p(y)$, (y 取为不在 $\neg p(c)$ 从 Γ 的证明中出现的新变元, 用 y 代替证明中所有的 c, 便得 $\neg p(y)$ 从 Γ 的证明.)

(4) $\forall y \neg p(y)$, （推广规则）

(5) $\forall y \neg p(y) \to \neg p(x)$, （量词公理）

(6) $\neg p(x)$, （分离规则）

(7) $\forall x \neg p(x)$, （推广规则）

(8) $\neg \exists x p(x)$. （$\forall x \neg p(x) \to \neg\neg \forall x \neg p(x)$ 是永真式）

(1)与(8)说明 Γ 是有矛盾的.

3.2 练习 1　对任意集 s 及集 $b=\{x\in s\mid x\notin x\}$(由内涵公理,$b$ 是集),

(1)$b\notin b$.反设 $b\in b$,则 b 具有 b 中元素的性质:$b\notin b$,矛盾.

(2)$b\notin s$.反设 $b\in s$.由(1),$b\notin b$.这说明 b 具有 b 中元素的性质,所以 $b\in b$,矛盾.

既然 $b\notin s$,而 s 是任意集,这说明对于任何集,都存在不是自己元素的集,从而说明把一切集都作为自己元素的集是不存在的.

上面的讨论指出,如果存在包含一切集的集 s,那么内涵公理中的"$x\in s$"便成了虚设,用内涵公理形成集的方式与无限制地形成集$\{x\mid p(x)\}$的方式并无区别,于是罗素悖论又可重演了.

3.2 思考题 1　$y=\varnothing$可用$\forall x(x\notin y)$消去;$\varnothing\in z$ 可用$\exists y(y=\varnothing\wedge y\in z)$消去.

3.3 思考题 1　参见 3.3 练习 2(3).

3.3 思考题 2　都至多有两个元素.

3.3 练习 1　错误的是(1),(6),(7),(10),(13).

3.3 练习 2　(1)$a=b$,　(2)$a=b=c$,　(3)$a=c$ 且 $b=d$.

3.3 练习 3　由(a,b,c)的定义两次用命题 1.

3.4 练习 1　(1)A,　(2)$\varnothing$,　(3)A,　(4)A,　(5)$-$,　(6)$-$,　(7)$\cup,\cap$,　(8)$\cup,\cap$,　(9)$\cap,-$,　(10)$\subset$,　(11)$\subset$,　(12)$\subset$,　(13)$\supset,\supset$,　(14)$\varnothing$.

3.4 练习 2　$\{a,b,c\}$的子集共 8 个.$\{a,b,\cdots,i,j\}$的子集共 2^{10}个.n 元集的子集共 2^n 个.

3.4 练习 3　(1)$c=a\vee c=b$,　(2)$b=a$,　(3)$a=b=c$,　(4)$a=c\wedge b=d$,　(5)$\{a,b,c,d,e,f\}$,　(6)$\{a\}$,　(7)a,　(8)b,　(9)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,　(10)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,　(11)$=$,　(12)$\supset$,　(13)$\cap,\cup$,　(14)$=$,　(15)$\subset$,　(16)$\cup$.

3.4 练习 4　参见§3.5 命题 1.

3.4 练习 5　题中 5 个语句互相等价.

3.4 思考题 1 不存在集 a 使 $\mathscr{P}(a)\subset a$. 反设存在 a 使 $\mathscr{P}(a)\subset a$, 则可作集

$$b=\{x\in a\mid x\notin x\}.$$

因 $b\subset a$, 故 $b\in\mathscr{P}(a)$. 由假设可知 $b\in a$. 这导致下面的矛盾: $b\in b\leftrightarrow b\notin b$.

3.4 思考题 2 不能. 反例: 设 $a=b=x=z, c=y, a\neq c$.

3.4 思考题 3 $\mathscr{P}(\bigcup a)=a$ 当且仅当存在集 b 使 $a=\mathscr{P}(b)$.

3.4 思考题 4 (4), (6), (7) 是错误的. (4) 中等号可改为 $\supset$.

(4) 的反例: 取 $a=\{x,y\}, b=\{y,z\}, x\neq y, z\neq x, z\neq y$.

(6) 中等式左边集含有 $\varnothing$, 右边集不含 $\varnothing$.

(7) 的反例: 取 $b=\{a\}$ 且 $a\neq\varnothing$.

3.5.1 练习 3 (2), (4), (6) 是错的. (6) 中当 $a=\varnothing$ 时, 不一定有 $b\subset d$.

3.5.2 练习 1 共 8 个.

3.5.2 练习 2 (1) $\bigcup$, (2) $\bigcap$.

3.5.2 练习 3 (1) $=$, (2) $\subset$, (3) $\supset$, (4) $\supset$.

3.5.2 练习 4 (1) $\{(t,t),(u,u),(v,v)\}$, (2) $\{(y,y),(z,z)\}$.

3.5.3 练习 1 (1) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, (2) $\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\}$,
(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, (4) $\varnothing$,
(5) $\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, (6) $\varnothing$,
(7) $\{(\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\})\}$, (8) f.

3.5.3 练习 2 64 个, 没有满射. 单射有 6 个.

3.5.3 练习 3 64 个, 满射有 6 个. 没有单射.

3.5.3 练习 4 (1) $=$, (2) $\subset$, (3) $\supset$, (4) $=$,
(5) $=$, (6) $=$, (7) $\supset$, (8) $\subset$.

3.5.3 练习 5 (1) 27, (2) 共 9 个, (3) $\{\varnothing\}$, (4) $\varnothing$.

3.5.3 思考题 1 a 到 $\mathscr{P}(a)$ 的双射不存在. 参见 §6.2 定理 1. a 到 $\mathscr{P}(a)$ 的单射容易建立: 对 $x\in a$, 令 x 对应于 $\{x\}$ 便可.

3.6.1 练习 1 (1) 4, (2) 0, (3) $\{\{1,2\},\{1\},\{1,0\}\},0,3,0,0,\{1\}$, (4) $4,0,3,0,0,0$.

3.6.1 练习 3 f 与 g 满足: $\forall x\in a\cap b\quad f(x)=g(x)$.

3.6.1 练习 4 及思考题 1 参见 4.4.1.

3.6.2 思考题 1 在定理 1 中, 取 $a=\omega, x_0=1$; 对任意取定的自然数 m, 令

$$h(n)=n\cdot m.$$

则按定理 1,惟一存在与 m 有关的函数 $f_m:\omega\to\omega$ 满足

$$f_m(0)=1,$$
$$f_m(n')=f_m(n)\cdot m.$$

规定 $m^n=f_m(n)$便符合题中的条件.

3.6.2 思考题 2　根据递归定理(3.6.2 定理 1),对给定的 a,s 与 e,惟一存在函数 $f:\omega\to a$ 具有性质

$$\begin{cases} f(0)=e, & (1)\\ f(n')=s(f(n)). & (2)\end{cases}$$

需要证明 f 是双射.

第一步,证明 f 是满射,即 $f[\omega]=a$.

考察 $f[\omega]\subset a$.首先有 $e\in f[\omega]$(由(1)).任取 $x\in f[\omega]$,设 $x=f(n)$, $n\in\omega$;此时有

$$s(x)=s(f(n))=f(n').\quad (由(2))$$

这说明 $s[f[\omega]]\subset f[\omega]$.由条件(iii)得 $f[\omega]=a$.

第二步,证明 f 为单射:

$$\forall n\in\omega\quad \forall m\in\omega(m\neq n\to f(m)\neq f(n)).\qquad (3)$$

对 n 归纳证明(3).

$n=0$ 时要证 $m\neq 0\to f(m)\neq e$(注意 $f(0)=e$).

事实上,当 $m\neq 0$ 时有 $k\in\omega$ 使 $m=k'$.这时有

$$f(m)=f(k')=s(f(k)),\quad (由(2))$$

由此及条件(i)即知 $f(m)\neq e$.

作归纳假设:$\forall m\in\omega(m\neq n\to f(m)\neq f(n))$.

下面证明 $m\neq n'\to f(m)\neq f(n')$.

设 $f(m)=f(n')$.这时 $m\neq 0$,否则 $m=0$ 时有

$$\begin{aligned} s(f(n)) &= f(n') && (由(2))\\ &= f(0) && (由所设)\\ &= e, \end{aligned}$$

这与条件(i)矛盾.设 $m=k'$,$k\in\omega$,于是有

$$\begin{aligned} s(f(k)) &= f(k') && (由(2))\\ &= f(m) && (已设\ m=k')\\ &= f(n') && (已设\ f(m)=f(n'))\\ &= s(f(n)). && (由(2)) \end{aligned}$$

因 s 为单射条件(ii),故由上式得 $f(k)=f(n)$.再由归纳假设得

$$k=n,k'=n',m=n'.$$

至此(3)的归纳证明完成.

3.6.3 练习 1 反设 N 是有限集,则由命题 2 知 N 不存在到真子集的双射.但 N 到偶数集存在双射.

3.6.3 练习 2 对有限集 a 的元素个数 n 归纳证明 a 的子集也是有限集. $n=0$ 时 $a=\varnothing$.假设命题对 n 成立,然后设存在双射 $f: a\to n+1$,并设 X 是 a 的子集,且设 $f(x)=n$,其中 $x\in a$.

情形 1,$x\notin X$,这时 X 是 $a-\{x\}$ 的子集,按归纳假设,X 是有限集.

情形 2,$x\in X$.这时 $X-\{x\}$ 是 $a-\{x\}$ 的子集从而是有限集.设存在 $X-\{n\}$ 到自然数 m 的双射,那么存在 X 到 $m+1$ 的双射,所以 X 是有限集.

4.1.1 练习 1 a 上二元关系有 512 个,其中等价关系有 5 个,例如

$$\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

4.1.1 思考题 2 a 上的等价关系有 15 个.参见 4.1.2 练习 3.

4.1.1 思考题 3 不能.只能说明 a 上具有对称性与可递性的二元关系 R 是 $\mathrm{Dom}(R)$ 上的等价关系,但不一定有 $\mathrm{Dom}(R)=a$.

4.1.1 练习 2 1° 自反性:$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=f(n)\}=\mathbf{N}\in F$,故 $f=_F f$.

2° 对称性显然.

3° 可递性:设 $f=_F g$, $g=_F h$,即

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=g(n)\}\in F,\quad \{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=h(n)\}\in F,$$

这时有

$$\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=h(n)\}\supset\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=g(n)\}\cap\{n\in\mathbf{N}\mid g(n)=h(n)\},$$

由滤子 F 的性质(2)与(3)知 $\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)=h(n)\}\in F$,即 $f=_F h$.

4.1.2 练习 1 (1)由 R 的定义,

$$xRy \leftrightarrow x \text{ 与 } y \text{ 属于 } P \text{ 的同一成员}.$$

1° R 的自反性:因 $\bigcup P=a$,故

$$\forall x\in a\quad \exists b\in P\quad x\in b.$$

这时当然有 xRx.

2° R 的对称性显然.

3° R 的可递性:设 xRy 且 yRz,即

$$x,y\in b\in P,\quad y,z\in c\in p.$$

这时 $y\in b\cap c\neq\varnothing$.由 P 的性质(ii)知 $b=c$.

(2) 设 $x\in b\in P$.因

$$t\in b\leftrightarrow tRx \quad (\text{由 } R \text{ 的定义})$$
$$\leftrightarrow t\in[x]\quad ([x]\text{ 的定义}),$$

故 $b=[x]$.这便证明了 $a/R=P$.

4.1.2 练习 2　$\mathbf{N}/R=\{[o],[1],\cdots[9]\}$，其中$[0]=\{0,10,20,\cdots\}$，$[1]=\{1,11,21,\cdots\}$，…

4.1.2 练习 3　$P_1=\{\{0\},\{1\},\{2\}\}$，$P_2=\{\{0\},\{1,2\}\}$，$P_3=\{\{0,1\},\{2\}\}$，$P_4=\{\{0,2\},\{1\}\}$，$P_5=\{\{0,1,2\}\}$.

4.1.2 练习 4　$a=\{0,1,2,3\}$的剖分是独元集的情形，1 种；剖分是 2 元集，7 种；剖分是 3 元集，6 种；剖分是 4 元集，1 种．a 的不同剖分共 15 种．

4.1.3 思考题 1　设 a 的元素皆非空．令 $b=\{(x,t)\mid x\in a, t\in x\}$．定义 b 上二元关系 R

$$(x,t)R(y,u)\leftrightarrow x=y.$$

R 是 b 上的等价关系．由选代表原则，b/R 存在代表集 f．f 即为所求的 a 上的选择函数．

4.2 练习 1　设有 b 与 c 都有(2)中性质：

$$a+b=\bar{0} \text{ 且 } a+c=\bar{0}.$$

则有

$$b=b+\bar{0}=b+(a+c)=(b+a)+c=(a+b)+c=\bar{0}+c=c.$$

4.2 练习 2　设 $a=[(m,n)]$，$b=[(p,q)]$．由 $a\cdot b=\bar{0}$，即$[mp+nq, mq+np)]=[(0,0)]$得

$$mp+nq=mq+np \tag{1}$$

由此可证 $m=n$ 或 $p=q$(从而 $a=\bar{0}$ 或 $b=\bar{0}$)．反设 $m\neq n$ 且 $p\neq q$．考虑(1)式对称性，不妨设 $m<n$，$p<q$．可令 $n=m+s$，$q=p+t$，其中 $s,t>0$．代入(1)整理得 $mt+st=0$，这与 $s,t>0$ 矛盾．

4.3 题 1　(iii) $ad=bc\rightarrow adf=bcf\rightarrow adf=bde$　(因 $cf=de$)

$$\rightarrow af=be \quad (\text{因 } d\neq 0).$$

4.3 题 2　注意 $k\neq 0$ 时$(a,b)\sim(ak,bk)$.

4.3 题 4(3)　令 $\bar{0}=[(0,1)]$.

4.3 题 4(4)　令 $\bar{s}=[(-a,b)]$.

4.3 题 6(7)　令 $\bar{1}=[(1,1)]$.

4.3 题 6(9)　令 $s=[(b,a)]$.

4.3 题 7　$[(a,b)]^{-1}=[(b,a)]$，　$r\div s=[(ad,bc)]$.

4.3 思考题 1　题中的等价关系的定义要调整．更重要的是：在新的商集里，若要保持加法与乘法定义不变，就不能做到每个非零元都有惟一的乘法逆元，而这一条是引进 $\mathbf{Q}$ 的主要目的．

4.3 题 8　$ad<bc\rightarrow adb_1d_1<bcb_1d_1$　(因 $b_1d_1>0$)

$$\rightarrow ba_1dd_1<bb_1c_1d \quad (\text{因 } ab_1=ba_1, cd_1=c_1d)$$

$\to a_1d_1 < b_1c_1$ （因 $b, d > 0$）.

4.3 题 9(12) $ad < bc$ 及 $cf < de \to adf < bcf < bde \to af < be$.

4.3 题 10 $f(p) = [(p, 1)]$.

4.3 题 13 $\mathrm{Ran}(f) = \bar{\mathbf{Z}}$.

4.3 思考题 2 $\frac{2}{3} = \frac{[(2,1)]}{[(3,1)]}$ （右边括号内的是旧整数）

$$= [(2,3)] = [(4,6)] = \frac{[(4,1)]}{[(6,1)]} = \frac{4}{6}.$$

4.4.1 练习 1 设超滤 F 非自由，即存在有限集 $\{n_1, \cdots, n_k\} \in F$. 于是

$$\mathbf{N} - \{n_1, \cdots, n_k\} = (\mathbf{N} - \{n_1\}) \cap \cdots \cap (\mathbf{N} - \{n_k\}) \notin F,$$

由滤子性质 2°知 $\mathbf{N} - \{n_1\}, \cdots, \mathbf{N} - \{n_k\}$ 不能同时属于 F. 设其中某个 $\mathbf{N} - \{n_i\} \notin F$. 再由超滤性质 4°知 $\{n_i\} \in F$，这说明 F 是主超滤：$F = F_{n_i}$.

4.5 思考题 1 不是. 例 $\frac{1}{\sigma} \in \mathbf{Q}_<$，但 $\frac{1}{\sigma}$ 的乘法逆元 $\sigma \notin \mathbf{Q}_<$.

4.6 题 1(1) 用 $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

4.6 题 2(2) 先让 $|\alpha| < \frac{1}{2k}$，$|\beta| < \frac{1}{2k}$，再用 $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$.

4.6 题 2(3) 先让 $|x| \leqslant m$，$|\alpha| < \frac{1}{mk}$.

4.6 题 3(3)，题 4，题 5 由题 2(2)，(3)立即可得.

4.6 题 6(9) $[x] \neq [0] \to x \not\sim 0 \to |x - 0| \notin \mathbf{I}$

$$\to \exists k \in \mathbf{N}\, |x| > \frac{1}{k} \to \exists k \in \mathbf{N}\, \left|\frac{1}{x}\right| < k，故 \frac{1}{x} \in \mathbf{Q}_<.$$

4.6 题 7 因 $x \not\sim y$，故有 $k \in \mathbf{N}$ 使 $y - x > \frac{1}{k}$. 对此 k 有

$$|x - x_1| < \frac{1}{3k}, |y - y_1| < \frac{1}{3k} \quad （因 x \sim x_1, y \sim y_1）.$$

于是 $y_1 - x_1 = y_1 - y + y - x + x - x_1 > -\frac{1}{3k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{3k} = \frac{1}{3k}$.

这说明

$$y_1 > x_1，且 x_1 \not\sim y_1.$$

4.6 题 8(12) $x < y \wedge y < z \to x < z$,

$(z - x > y - x) \wedge x \not\sim y \to x \not\sim z$.

4.6 题 9 $x < y$ 时，若 $x \not\sim y$，则 $[x] < [y]$；若 $x \sim y$，则 $[x] = [y]$.

4.7 思考题 1 设 $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. 不妨设 $a > 0$（否则讨论 $-a$）. 对任意 $k \in \mathbf{N}$，令

$$n_k = \min\{n \in \mathbf{N} \mid a \cdot 10^k < n\} - 1,$$

则有

$$\forall k \in \mathbf{N}\left(\frac{n_k}{10^k} < a < \frac{n_k+1}{10^k}\right), \quad a = \left[\frac{n_\sigma}{10^\sigma}\right] \quad (\sigma \in \mathbf{N}_\infty).$$

$n_0, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{10^2}, \cdots, \frac{n_k}{10^k}, \cdots$ 给出了 a 的十进表示.

5.3 练习 1　令 $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,在 $\mathbf{C}$ 中定义加法乘法如下:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

这样定义的 + 与 · 具有域的性质.(零元为(0,0),单位元为(1,0).)

5.3 附练习 1　反设 $\overline{1} < \overline{0}$($\overline{1} \neq \overline{0}$ 是域的已知性质).根据序域性质,有

$\overline{1} + (-\overline{1}) < \overline{0} + (-\overline{1})$,　$\overline{0} < -\overline{1}$;　$\overline{0} \cdot (-\overline{1}) < (-\overline{1}) \cdot (-\overline{1}) = \overline{1}, \overline{0} < \overline{1}$,矛盾.

5.3 附练习 2　1°　对 n 归纳.$\overline{m} + \overline{n+1} = \overline{m} + (\overline{n} + \overline{1}) = (\overline{m} + \overline{n}) + \overline{1} = \overline{m+n} + \overline{1} = \overline{m+n+1}$.

2°　对 n 归纳.$\overline{m} \cdot (\overline{n+1}) = \overline{m} \cdot (\overline{n} + \overline{1}) = \overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{m} \cdot \overline{1}$

$$= \overline{m \cdot n} + \overline{m} = \overline{m \cdot n + m} = \overline{m \cdot (n+1)}.$$

3°　先对 n 归纳证明 $n > 0 \to \overline{n} > \overline{0}$.($\overline{n+1} = \overline{n} + \overline{1} \geqslant \overline{0} + \overline{1} > \overline{0}$.)

然后设 $m < n$.由 $n - m > 0$ 得 $\overline{n-m} > \overline{0}$,于是

$$\overline{n} = \overline{m + (n-m)} = \overline{m} + \overline{n-m} > \overline{m} + \overline{0} = \overline{m}.$$

5.3 附练习 3

1°　$\varphi\left(\frac{n}{m} + \frac{q}{p}\right) = \varphi\left(\frac{np + mq}{mp}\right) = \frac{\overline{np + mq}}{\overline{mp}} = \frac{\overline{np} + \overline{mq}}{\overline{mp}}$

$= \frac{\overline{n}}{\overline{m}} + \frac{\overline{q}}{\overline{p}} = \varphi\left(\frac{n}{m}\right) + \varphi\left(\frac{q}{p}\right)$.

2°　与 1°类似.

3°　不妨设 $m, p > 0$. $np < mq \to \overline{np} < \overline{mq}$　(由练习 2).

5.3 附练习 4

1°　设 $\mathbf{R}$ 中另有以 a 为最小上界的递增有理数列 s_k,对应的 $\overline{s}_k$ 在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的最小上界是 $\overline{a}'$,则有 $\overline{a}' = \overline{a}$.(不妨反设 $\overline{a} < \overline{a}'$.由 $\overline{a}'$ 的最小性知,存在 $i \in \omega$ 使 $\overline{a} < \overline{s}_i$.在 $\mathbf{R}$ 中,因 $s_i < a$,故可取充分大的 k 使 $r_k > s_i$.由练习 3(3°)知 $\overline{r}_k > \overline{s}_i > \overline{a}$,这与 $\overline{a}$ 是 $\overline{r}_k$ 的上界矛盾.)

2°　分别取以 a, b 为最小上界的递增有理数列 r_k, s_k.因 $a < b$,故可取 $k \in \omega$ 使 $a < s_k$.又因每个 $r_i < a$,故每个 $\overline{r}_i < \overline{s}_k$,从而有 $\overline{a} \leqslant \overline{s}_k < \overline{b}$.

3°　设 $x \in \overline{\mathbf{R}}$.取以 x 为最小上界的递增有理数列 $\overline{r}_k$. $\mathbf{R}$ 中对应于 $\overline{r}_k$ 的 r_k

有最小上界,记为 a,则 $\varphi(a)=x$.

4° 设另有 ψ 也是 $\mathbf{R}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的保序双射,且满足 $\psi(r)=\overline{r}(r\in\mathbf{Q})$. 下证 $\psi^{-1}\circ\varphi(a)=a$(即 $\varphi(a)=\psi(a)$),其中 $a\in\mathbf{R}$.

先设 $\psi^{-1}\circ\varphi(a)<r<a$,其中 $r\in\mathbf{Q}$.这时有

$$\varphi(a)=\psi\circ\psi^{-1}\circ\varphi(a)<\psi(r)=\overline{r}=\varphi(r)<\varphi(a),\text{矛盾}.$$

再设 $a<r<\psi^{-1}\circ\varphi(a)$, $r\in\mathbf{Q}$.这时有

$$\varphi(a)<\varphi(r)=\overline{r}=\psi(r)<\psi\circ\psi^{-1}\circ\varphi(a)=\varphi(a),\text{矛盾}.$$

5° 分别取以 a,b 为最小上界的递增有理数列 r_k,s_k,则易知 r_k+s_k, $\overline{r_k+s_k}$与$\overline{r}_k+\overline{s}_k$ 分别以$a+b$,$\overline{a+b}$,$\overline{a}+\overline{b}$ 为最小上界. 因$\overline{r_k+s_k}=\overline{r}_k+\overline{s}_k$(练习 3(1°)),故$\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$.

6° $\varphi(a)+\varphi(-a)=\varphi(a+(-a))=\varphi(0)=\overline{0}$.

7° $a=0$ 或 $b=0$ 时,显然.考虑 6°,不妨设 $a,b>0$,证明与 5°类似.

5.4 练习 1 对 n 归纳

(1) $n=0$ 时,因 $\forall x(x\geqslant 0)$在 ${}^*\mathbf{N}$ 中也真,故 $\tau\geqslant 0$. 又因 $0\in\mathbf{N}$,故 $\tau\neq 0$.

(2) 设 $\tau>n$,下证 $\tau>n+1$.反设 $\tau\leqslant n+1$.因语句

$$\forall x(n<x\leqslant n+1\rightarrow x=n+1)$$

在 $\mathbf{N}$ 与 ${}^*\mathbf{N}$ 中皆真,故由 $n<\tau\leqslant n+1$ 得 $\tau=n+1$,与 $\tau\notin\mathbf{N}$ 矛盾.

6.1 练习 1 正整数(和 0)与偶数对应,负整数与奇数对应.

6.1 练习 2 $f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$.

为证 f 是单射,设 $m\neq i$ 或 $n\neq j$,要证 $f(m,n)\neq f(i,j)$. 分 $m+n=i+j$ 与$m+n>i+j$ 两种情形讨论.

为证 f 是满射,对任意 $k\in\omega$,要找 $m,n\in\omega$ 使 $f(m,n)=k$.取满足

$$k<\frac{1}{2}(l+1)(l+2)$$

的最小 l. 当 $k=\frac{1}{2}l(l+1)$时,取 $n=l,m=0$;当 $k>\frac{1}{2}l(l+1)$时,取

$$m=k-\frac{1}{2}l(l+1),\ n=l-m.$$

6.1 思考题 1 类似于例 1,把所有分数列成无穷点阵,去掉重复数,依次指定自然数号码,便可建立双射. 简单的方法见§6.3 例 2.

6.1 练习 3 F 的单射性:设 $b_1\neq b_2(\subset a)$. 取 $x\in b_1-b_2$,则 $f_{b_1}(x)=1$ 而 $f_{b_2}(x)=0$.

F 的满射性:对任意 $f:a\rightarrow 2$,令 $b=\{x\in a\mid f(x)=1\}$,则 $F(b)=f$. 事实上,有

$$\forall x \in a(f(x)=1 \leftrightarrow f_b(x)=1).$$

6.1 练习 4　对 n 归纳. 可用命题 1.

6.1 练习 5　$f(x)=\tan\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi$ 给出了所需双射.

6.1 练习 6　在(0,1)中取出一串点:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n+2},\cdots,$$

让它们分别与

$$0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

对应,区间的其他点不动. 另一种方法是利用练习 5 及 §6.2 引理 1.

6.1 练习 7

(1)取 a 到 b 的双射 f. 下式定义的 F 是 $\mathscr{P}(a)$ 到 $\mathscr{P}(b)$ 的双射:

$$F(b)=f[b],\quad b\subset a.$$

(2)取 a 到 b 的双射 f. 下式定义的 g 是 $a\cup c$ 到 $b\cup c$ 的双射:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in a, \\ x, & x\in c. \end{cases}$$

(3)与(2)类似.

(4)取 a 到 b 的双射 f, c 到 d 的双射 g; 则下式定义的 h 是 $a\times c$ 到 $b\times d$ 的双射:

$$h((x,y))=(f(x),g(y)).$$

6.1 练习 8　ω 到 a 的双射 f 如下递归定义:

$f(0)=\min a$　(即 a 中最小数),

$f(1)=\min(a-\{f(0)\})$,

$\vdots$

$f(n)=\min(a-\{f(i)\mid i<n\})$,　(注意 $\{f(i)\mid i<n\}$ 是有限集.)

f 严格递增,故是单射. 反设 f 不是满射,令 $m=\min(a-f[\omega])$. 取 $k\in\omega$ 使 $f(k)>m$ (注意 $f[\omega]$ 无界). 于是

$$m=\min(a-f[\omega])=\min(a-\{f(i)\mid i<k\})=f(k)\in f[\omega],\text{矛盾}.$$

6.1 思考题 2　ω-旅店店主可将他的请求由 f 调整为 g:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 的个位数为 }0,1,2,3,4, \\ x, & x\text{ 的个位数为 }5,6,7,8,9. \end{cases}$$

本题解答与店主的调整类似,详见 §6.2 引理 1.

6.2 练习 1

(1) a 到 $\mathscr{P}(a)$ 的单射 f 由下式定义:

$$f(x)=\{x\},\quad x\in a.$$

(2) 任取 $y\in b$,则所需单射 f 由下式定义:

$$f(x)=(x,y),\quad x\in a.$$

(3) 让 $x(\in a)$ 与 b 到 a 的常值函数($f(t)\equiv x,t\in b$)对应.

(4) 任取 $s\neq t\in a$. 让 $y\in b$ 与 $f_y\in {}^b a$ 对应, f_y 由下式定义:

$$f_y(x)=\begin{cases}s, & x=y,\\ t, & x\neq y.\end{cases}$$

(5) 任取 $t\in a$. 让 $f:b\to a$ 与 $g:c\to a$ 对应, g 的定义是:

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in b,\\ t, & x\in c-b.\end{cases}$$

6.2 练习 2 任取 $y_0\in b$. 设 $f:b\to a$ 是已知的单射,则下式定义的 g 是 a 到 b 的满射:

$$g(x)=\begin{cases}f^{-1}(x), & x\in f[b],\\ y_0, & x\notin f[b].\end{cases}$$

6.2 思考题 1 参见§6.5.

6.2 思考题 2 参见§9.2 定理 3 与§9.2 练习 1.

6.3 练习 1 (1) $a\approx c$ 导致 $a\approx b$.

(2) $a\approx c$ 导致 $b\approx c$.

6.3 练习 2 由下式用引理 1 便可:

$${}^{\mathbf{N}}2\subset{}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}\subset\mathscr{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\approx\mathscr{P}(\mathbf{N})\approx{}^{\mathbf{N}}2.$$

上式依次用了以下事实:

$2\subset\mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射 $f\subset\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\approx\mathbf{N}$ 及§6.1 练习 7(1), §6.1 命题 1.

6.4 练习 1 是可数集的有:(1),(2),(4),(5),(8),(10),(12),(14),(15),(17),(18),(19),(20),(22),(23),(24),(25),(26),(27),(28).

以下用 a 表示各题中的无限集.

(1)与(2)用可数集性质 4 与性质 3.

(3) $\mathbf{R}=a\cup\mathbf{Q}$.

(4) $a=\{\ln 1,\ln 2,\cdots\}$.

(5) $a=\mathbf{N}$.

(6) $a\approx\mathbf{R}$.

(7) $a=\mathscr{P}(\mathbf{N}_2)$,其中 $\mathbf{N}_2=\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}$. 用§6.1 练习 7(1).

(8) 记 $a_n=\{x\in\mathscr{P}(\mathbf{N})\mid x$ 有 n 个元素$\}$,则 $a=\bigcup_{n\in\omega}a_n\preccurlyeq\bigcup_{n\in\omega}\mathbf{N}^n$.

(9) $a\approx\mathbf{R}$.

(10) 每个 $a_n\approx\mathbf{N}$.

(11) $A_0=\mathbf{R}$.

(12) $\mathscr{P}(\mathbf{N}_k)\approx 2^{k+1}$(§6.1 练习 4),用可数集性质 7.

(13) $a\approx\mathbf{R}$.

(14) $a\approx\mathbf{Q}^3$.

(15) $a\approx\mathbf{Q}^3$(0 次与 1 次多项式视为 2 次多项式的特例).

(16) $\mathbf{C}=a\cup\mathbf{R}$.

(17) 每个二次方程有两个根(可以是重根).利用(15)及可数集性质 7.

(18) $a\approx\bigcup_{n\in\omega}\mathbf{Q}^{n+1}$.

(19) n 次方程有 n 个根(可以是重根).利用(18)及可数集性质 7.

(20) $a\approx\mathbf{Q}^2$.

(21) $a={}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}\approx{}^{\mathbf{N}}2(\approx\mathbf{R})$.用§6.3 练习 2.

(22) $a\approx\mathbf{Q}$ 的全体有限序列的集.

(23) $a\subset\bigcup_{n\in\omega}(\mathbf{Q}\cup\{(,),+,-,\times,\div,\sqrt{\ },\sqrt[3]{\ },\cdots\})^n$.

(24) 在每个开区间内任取一有理点(因 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠).把所有这些有理点形成的集记作 b,则 $a\approx b\subset\mathbf{Q}$.

(25),(26)与(24)类似.

(27) 每个孤立极值点都有自己的开区间,其中没有别的极值点;取出一个这样的开区间与该极值点对应.然后利用(24).

(28) 因单调函数的间断点都是第一类间断点(函数在该点的左、右极限都存在),故每个间断点都对应于 y 轴上的一个开区间(分别以左、右极限为端点).然后利用(24).

6.4 思考题 1 见 6.4 附.

7.1 练习 1 a 上有 16 个二元关系,其中有 3 个偏序,它们是$\varnothing$,$\{(x,y)\}$,$\{(y,x)\}$.

7.1 练习 2 a 上有 2^9 个二元关系,其中有 19 个(严格)偏序.

7.1 思考题 1 a 上的恒等关系 $I=\{(x,x)\mid x\in a\}$同时是 a 上的偏序与等价关系.严格偏序不可能具有对称性,故不能同时是等价关系.

7.1 思考题 2 对每个 $x\in a$,令 $a_x=\{t\in a\mid t\leqslant x\}$, $A=\{a_x\mid x\in a\}$.这时有

$$x\leqslant y\leftrightarrow a_x\subset a_y.$$

x 对应于 a_x 的映射是 a 到 A 的保序双射.

7.1 练习 3 按 r 是严格偏序验证 r^{-1}满足 1°与 2°.例如,

$$(x,x)\notin r \rightarrow (x,x)\notin r^{-1}.$$

7.1 练习 4 设 $f(x)=f(y)$. 由"$\leqslant$"在 b 中的自反性知 $f(x)\leqslant f(y)$ 且 $f(y)\leqslant f(x)$. 由此及 f 的已知性质得 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$. 再由 a 中"$\leqslant$"的反对称性知 $x=y$. 条件修改后, 可以给出这样的例子: x 与 y 在 a 中不可比, 但 $f(x)=f(y)$.

7.1 思考题 3 令 $a=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 定义 a 上二元关系 r 为

$$r=\{(x_1,x_0),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),\cdots,(x_{n+1},x_{n+2}),\cdots\}.$$

用"<"代替 r 写出来, 有 $x_1<x_0$, 且有

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n+1}<\cdots.$$

偏序集 a 没有最大元, 但有一个极大元 x_0.

7.1 练习 5 极大反链共有 4 个, 例如: $\{\{x\},\{y\},\{z\}\}$, $\{\{x,y\},\{z\}\}$, $\cdots$.

7.2 思考题 1 在 $\mathbf{N}^2$ 上建立全序的方式很多, 例如可按字典顺序, 令

$$(x,y)r(u,v) \leftrightarrow x<u \vee (x=u \wedge y<v).$$

7.2 思考题 2 假设 $\mathbf{C}$ 中有了具备序域中序的关于运算性质的全序"<". 那么会有以下矛盾:

$$i=0 \rightarrow -1=0 \quad (\text{两边平方}),$$
$$i>0 \rightarrow -1>0,$$
$$i<0 \rightarrow -i>0 \rightarrow -1>0.$$

7.2 练习 1 r 不满足三分律. 下式定义的 f 与 g 按 r 不可比:

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases} \qquad g(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

s 的可递性的验证: 设

$$f(k_1)<g(k_1) \wedge \forall n<k_1(f(n) = g(n)) \text{ 且 } g(k_2)<h(k_2) \wedge \forall n<k_2(g(n)=h(n)).$$

令 $k=\min\{k_1,k_2\}$, 则有

$$f(k)<h(k) \wedge \forall n<k \quad (f(n)=h(n)).$$

s 满足三分律的验证: 任取 $f,g\in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$. 若 $f\neq g$, 则令

$$k=\min\{n\in\mathbf{N} \mid f(n)\neq g(n)\}.$$

于是当 $f(k)<g(k)$ 时 fsg, 当 $g(k)<f(k)$ 时 gsf. ($\min a$ 指 a 的最小元.)

7.2 练习 2 对 n 归纳. 首先 $f(0)\geqslant 0$. 设 $f(n)\geqslant n$ 但 $f(n+1)<n+1$, 则有

$$f(n+1)\leqslant n\leqslant f(n),$$

这与 f 的保序性矛盾.

7.2 练习 3　令 $b=\mathbf{N}-a(\neq\varnothing, a$ 是真子集).

$$n=\min b$$

$k<n$ 时,$k\notin b$(由 n 的最小性),故 $k\in a$.反之,设 $k\in a$,下证 $k<n$.反证 $n\leqslant k$,由"前段"的定义(定义 3)知 $n\in a$,这与 $n\in b$ 矛盾.

7.2 思考题 3　能用无限种方式建立 $\langle\mathbf{R},<\rangle$ 的自同构.例如,用下面方式定义的 f 都符合要求:

$$f(x)=x$$
$$f(x)=x^3$$
$$\vdots$$

7.2 思考题 4　$\langle\mathbf{N},<\rangle$ 的自同构只有恒等映射一种.设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是保序满射,下证 $f(n)=n$.

对 n 归纳.首先有 $f(0)=0$(由 f 是保序满射易知).

设 $k<n$ 时 $f(k)=k$,但 $f(n)>n$(由练习 2 知 $f(n)\geqslant n$).因 f 是满射,故可设 $f(m)=n$.由 f 保序性知必有 $m<n$,这时用归纳假设得 $f(m)=m$,矛盾.

7.2 思考题 5　$f(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ 给出了所需要的同构映射.方式不止一种.

7.2 思考题 6　不能.参见§7.3.

7.3 练习 1　例如:$0,-1,1,-2,2,\cdots,-n,n,\cdots$.

7.3 练习 2　设 $<_a$ 是 a 中良序.在 b 中定义序 $<_b$ 如下.对于任意 $y_1,y_2\in b$,设 $y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$.规定

$$y_1<_b y_2\leftrightarrow x_1<_a x_2.$$

于是 f 为保序双射,且保持良基性.

7.3 练习 3　用练习 2,只须找到 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的双射.这可以办到,因 $\mathbf{Q}\approx\mathbf{N}$.

7.3 思考题 1　$\{t\in\mathbf{Q}\mid t<0\vee t^2<2\}$ 是 $\mathbf{Q}$(按通常序)的前段,但不能表示成 $\{t\in\mathbf{Q}\mid t<x\}(x\in\mathbf{Q})$ 的形式.有理数集的前段与实数一样多,比有理数多得多.

7.3 练习 4　因 $y\in a_x, y<x$,故当 a 中元素 $t<y$ 时,有 $t<x, t\in a_x$.于是

$$(a_x)_y=\{t\in a_x\mid t<y\}=\{t\in a\mid t<y\}=a_y.$$

7.3 练习 5　任取 a 的非空子集 c,要证 c 有 r_- 极小元.因 c 的像 $f[c]$ 是 b 的非空子集,由 b 中序的良基性知 $f[c]$ 有最小元,记作 y_0.设 $f(x_0)=y_0$,$x_0\in c$.x_0 便是所求的 r_- 极小元.事实上,任一 $x\in c$ 都不会有 xrx_0,否则由

f 的已知性质得 $f(x)<f(x_0)=y_0$，这与 y_0 的最小性矛盾.

7.4 思考题 1 不成立. 考察由下式定义的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

$$f(x)=\arctan x.$$

7.4 思考题 2 不成立. 参见 §7.2 思考题 5.

7.5 练习 1 $\subset,\in,\subset$.

7.5 练习 2 $\in$，n 是可递集，偏序.

7.5 练习 3 对 n 归纳. 首先，$0=0\vee 0\in 0$ 自然成立.

设 $n=0\vee 0\in n$. 此时若 $n=0$，则有 $0\in 0'=n'$；若 $0\in n$，也有 $0\in n'$；总之有 $0\in n'$；于是得 $n'=0\vee 0\in n'$ 成立.

7.5 练习 4 对 m 归纳. $m=0$ 时自动成立(蕴涵式前件为假). 假设

$$n\in m\to(n'=m\vee n'\in m).$$

当 $n\in m'$ 时，有两种可能：

(i) $n=m$，此时 $n'=m'$.

(ii) $n\in m$，由归纳假设(1)，或 $n'=m$，或 $n'\in m$，这二者都导致 $n'\in m'$.

总之有 $n\in m'\to n'=m'\vee n'\in m'$.

7.5 练习 5 对 n 归纳. $m=0$ 时利用练习 3 的结论便可.

假设 $n\in m\vee n=m\vee m\in n$. 此时若 $n\in m$，则 $n\in m'$；若 $n=m$，则 $n\in m'$；若 $m\in n$，则 $m'=n\vee m'\in n$(由练习 4)；总之，题中结论对 m' 也成立.

7.5 练习 6 全序.

7.5 练习 7 对 n 归纳. $n=0$ 时自然成立.

设 $m\in n\to m\in\omega$. 下证 $m\in n'\to m\in\omega$. 事实上，当 $m\in n'$ 时，有 $m\in n$ 或 $m=n$；若 $m\in n$，则由归纳假设知 $m\in\omega$；若 $m=n$，则当然有 $m\in\omega$.

7.5 练习 8 由练习 7 知 ω 是可递集，$n\in\omega$ 时便有 $n\subset\omega$. 因 $\langle\omega,\in\rangle$ 是全序结构(练习 6)，故 $\langle n,\in\rangle$ 作为 $\langle\omega,\in\rangle$ 的子结构也是全序结构.

7.5 练习 9 对 n 归纳. $n=0$ 时命题自然成立.

假设命题对 n 成立. 下证当 $\varnothing\neq b\subset n'$ 时 b 有 $\in_-$ 最小元. $b\subset n'$ 且 $b\neq\varnothing$ 时，有以下两种可能.

(i) $b-\{n\}=\varnothing$，此时 $b=\{n\}$，n 为 b 的 $\in_-$ 最小元.

(ii) $b-\{n\}\neq\varnothing$，此时 $b-\{n\}\subset n$；由归纳假设，作为 n 的非空子集，$b-\{n\}$ 有 $\in_-$ 最小元，设为 m；因 $m\neq n$，故 $m\in n$(注意 $b\subset n'$)，这说明 m 也是 b 的 $\in_-$ 最小元.

7.5 练习 10 良序.

7.5 练习 11　反设 n 不是 a 的 $\in_-$ 最小元，即另有 $m\in a$ 使 $m\in n$，则 $m\in n\cap a$，这与 $n\cap a=\varnothing$ 矛盾.

7.5 练习 12　(1) 练习 9 中令 $b=n\cap a\subset n$，因 $n\cap a\neq\varnothing$，故 $n\cap a$ 有 $\in_-$ 最小元.

(2) 反设另有 $m_0\in a$，$m_0\in m$，则有 $m_0\in n\cap a$，与 m 的最小性矛盾.

7.5 练习 13　任取 $n\in a$. 若 $n\cap a=\varnothing$，则由练习 11 知 n 是 a 的 $\in_-$ 最小元；若 $n\cap a\neq\varnothing$，则由练习 12 知 $n\cap a$ 有 $\in_-$ 最小元，也是 a 的 $\in_-$ 最小元.

7.5 练习 14　良序.

7.6 练习 15　对 n 归纳. $n=0$ 时自然成立.

假设 $m\in n\leftrightarrow m<n$，下证 $m\in n'\leftrightarrow m<n'$.

$(\rightarrow)$　$m\in n'$ 时有 $m=n$ 或 $m\in n$. 此时若 $m=n$，则 $m<m+1=m'=n'$；若 $m\in n$，则由归纳假设得 $m<n<n+1=n'$.

$(\leftarrow)$　设 $m<n'$，则用 $m'\leqslant n'$，$m+1\leqslant n+1$，$m\leqslant n$. 此时若 $m=n$，则自然有 $m\in n'$；若 $m<n$，则由归纳假设知 $m\in n(\subset n')$，$m\in n'$.

8.1 思考题 1　参见 §8.2，§8.3.

8.1 练习 1　设 $\alpha-\{0\}$ 的 $\in_-$ 最小元是 x. 因 0 是 α 的 $\in_-$ 最小元，故 $0\in x$. 下证 $x=\{0\}=1$. 反设有 $t\in x$ 且 $t\neq 0$. 因 α 是可递集，故 $t\in\alpha$. 又因 $t\neq 0$，故 $t\in\alpha-\{0\}$. $t\in x$ 与 x 的最小性矛盾. 类似可知，若 $\alpha-\{0,1\}\neq 0$，则 $\alpha-\{0,1\}$ 的最小元是 2. 类似推理还可继续下去.

8.1 练习 2　设 $b\subset a$ 且 $b\neq 0$. 任取 $\alpha\in b$. 分两种情形讨论：

情形 1，当 $\alpha\cap b=0$ 时，α 就是 b 的 $\in_-$ 极小元，否则有 $\alpha_0\in b$ 使 $\alpha_0\in\alpha$，于是 $\alpha\cap b\neq 0$.

情形 2，当 $\alpha\cap b\neq 0$ 时，$\alpha\cap b$ 作为序数 α 的非空子集有 $\in_-$ 极小元 α_0，这个 α_0 也是 b 的 $\in_-$ 极小元. 事实上，若另有 $\gamma\in b$ 使 $\gamma\in\alpha_0$，则有 $\gamma\in\alpha$（因 α 是可递集）；这导致 $\gamma\in\alpha\cap b$，与 α_0 在 $\alpha\cap b$ 中的极小性矛盾.

8.2 练习 1

$(\rightarrow)$ 设 $\alpha\leqslant\beta$. $\alpha=\beta$ 时，当然有 $\alpha\subset\beta$；$\alpha\in\beta$ 时，因 β 是可递集，故也有 $\alpha\subset\beta$.

$(\leftarrow)$ 设 $\alpha\subset\beta$. 反设 $\beta<\alpha$ 即 $\beta\in\alpha$，由此及 $\alpha\subset\beta$，得 $\beta\in\beta$，与 $\in_-$ 反自反性矛盾.

8.2 练习 2　当 $\beta\in\alpha'$ 时总有 $\beta=\alpha$ 或 $\beta\in\alpha$，故不能同时再有 $\alpha\in\beta$.

8.2 练习 3　假设 $\alpha<\beta$ 但 $\beta'\leqslant\alpha'$，则 $\beta\in\beta'\subset\alpha'$，于是 $\beta\in\alpha$ 或 $\beta=\alpha$，与 $\alpha<\beta$ 矛盾.

8.2 练习 4 反设 $\omega=\alpha'$，则 $\alpha\in\omega$. 因 ω 是归纳集，由 $\alpha\in\omega$ 即得 $\alpha'\in\omega$. 这导致 $\omega\in\omega$，与 $\in_-$ 反自反性矛盾.

8.2 练习 5 1,5,8,9;0,3,4,0.

8.2 练习 6 α_1,α_n.

8.2 练习 7 α.

$$\alpha\subset\bigcup\alpha':\beta\in\alpha(\in\alpha')\to\beta\in\bigcup\alpha';$$

$$\bigcup\alpha'\subset\alpha:\beta\in\gamma\in\alpha'\to\beta\in\gamma\in\alpha\text{ 或}\beta\in\gamma=\alpha\to\beta\in\alpha.$$

8.2 练习 8 β. $\alpha\in\beta$ 时，因 $\alpha\in\alpha'$，故 $\alpha\in\bigcup\{\alpha'\mid\alpha\in\beta\}$. 反之，设 $\gamma\in\bigcup\{\alpha'\mid\alpha\in\beta\}$，则有 $\alpha\in\beta$ 使 $\gamma\in\alpha'$，$\gamma\in\alpha\in\beta$ 或 $\gamma=\alpha\in\beta$，总之 $\gamma\in\beta$.

8.2 练习 9 $\bigcap a$ 由序数组成(用到 §8.1 命题 2)，由 §8.1 定理 1 知是 $\in_-$ 良序集且是可递集：

$x\in y\in\bigcap a\to\forall\alpha\in a(x\in y\in\alpha)\to\forall\alpha\in a(x\in\alpha)\to x\in\bigcap a$.
设 β 是 a 的最小元. 为证 $\bigcap a=\beta$，只用证 $\beta\leqslant\bigcap a$(显然 $\bigcap a\subset\beta$). 反设 $\bigcap a<\beta$，便知 $\bigcap a$ 小于 a 的每个元素，导致 $\bigcap a\in\bigcap a$，与 $\in_-$ 反自反性矛盾.

8.2 练习 10 因 ω 是归纳集，故有

$$n\in\omega\to(n\in)n'\in\omega\to n\in\bigcup\omega;$$

反之，$n\in\bigcup\omega\to\exists m\in\omega(n\in m)\to n\in\omega$ (因 ω 是可递集).

8.2 思考题 1 要用替换公理. 参见 §8.3.

8.3 练习 1 可以用内涵公理直接证明，这需要证明事实

$$\forall x\in a\mathscr{P}(x)\in\mathscr{P}\mathscr{P}(\bigcup a).$$

有了 ZF7，事情简单了：取 ZF7 中的公式 $\varphi(x,y)$ 为 $y=\mathscr{P}(x)$便可(每个集的幂集只有一个).

8.3 练习 2 设 a 的序型是 α，则 a'的序型是 α'：$a'\cong\alpha'$.

8.3 练习 3 在 ω 中规定 0 是 r_- 最大元，其余 r 与 $\in$ 同，于是 $\langle\omega,r\rangle$ 的序型是 ω'.

8.3 练习 4 让整数集中的新序由下面的排列确定：

$$0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n\cdots.$$

8.4 练习 1 $\omega+1=\omega'$，而按加法定义，注意 ω 是极限序数，有

$$1+\omega=\bigcup\{1+n\mid n<\omega\}=\omega,$$

所以有 $1+\omega<\omega+1$.

8.4 练习 2 $\omega\cdot 2=\omega\cdot 1+\omega=\omega+\omega$，而

$$2\cdot\omega=\bigcup\{2\cdot n\mid\in\omega\}=\omega,$$

所以有 $2\cdot\omega<\omega\cdot 2$.

8.4 练习 3 ($\to$) 对 α_2 归纳(**On** 上的超限归纳)，分三种情形.

情形 1，$\alpha_2=0$ 时自然成立.

情形 2，$\alpha_2=\delta'$ 时，若 $\alpha_1<\alpha_2$，则 $\alpha_1\leqslant\delta$. 于是有

$$\beta+\alpha_1\leqslant\beta+\delta\quad(\alpha_1<\delta\text{ 时用了归纳假设})$$
$$<(\beta+\delta)'=\beta+\delta'=\beta+\alpha_2.$$

情形 3，α_2 为极限序数时，若 $\alpha_1<\alpha_2$，则 $\alpha'_1<\alpha_2$. 于是有

$$\beta+\alpha_1<(\beta+\alpha_1)'=\beta+\alpha_1'\leqslant\bigcup\{\beta+\gamma\mid\gamma<\alpha_2\}=\beta+\alpha_2.$$

($\leftarrow$) 设 $\beta+\alpha_1<\beta+\alpha_2$，用反证法即得 $\alpha_1<\alpha_2$.

8.4 练习 4　利用 §8.2 命题 4，只用证 $\beta+\gamma=\bigcup(\beta+\gamma)$. 因 $\beta+\gamma$ 是可递集，故 $\bigcup(\beta+\gamma)\subset\beta+\gamma$. 下证 $\beta+\gamma\subset\bigcup(\beta+\gamma)$.

设 $\alpha<\beta+\gamma$. 按加法定义，$\beta+\gamma=\bigcup\{\beta+\zeta\mid\zeta<\gamma\}$（注意 γ 是极限序数）. 于是有 $\zeta<\gamma$ 使 $\alpha<\beta+\zeta$，进而有 $\alpha<\beta+\zeta<\beta+\gamma$（用了题 3 结论）. 这说明 $\alpha<\bigcup(\beta+\gamma)$.

8.4 练习 5　对 γ 归纳.

$\gamma=0$ 时，$(\alpha+\beta)+0=\alpha+\beta=\alpha+(\beta+0)$.

对后继序数 $\gamma=\delta'$，设 $(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)$，则有

$$(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\beta)+\delta'=((\alpha+\beta)+\delta)'=(\alpha+(\beta+\delta))'$$
$$=\alpha+(\beta+\delta)'=\alpha+(\beta+\delta')=\alpha+(\beta+\gamma).$$

以上各步除了归纳假设，还用了加法定义的第二式.

γ 为极限序数时，由定义知 $\beta+\gamma=\bigcup\{\beta+\delta\mid\delta<\gamma\}$，由此及练习 3 易得

$$\bigcup\{\alpha+(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}=\bigcup\{\alpha+\zeta\mid\zeta<\beta+\gamma\}.\tag{1}$$

又由加法定义第三式知

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\bigcup\{(\alpha+\beta)+\delta\mid\delta<\gamma\}$$
$$=\bigcup\alpha+(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}\text{（用了归纳假设）}.$$

由练习 4 知 $\beta+\gamma$ 也是极限序数，再由加法定义第三式知

$$\alpha+(\beta+\gamma)=\bigcup\{\alpha+\zeta\mid\zeta<\beta+\gamma\}.$$

结合(1)便得所要结论.

8.5 思考题 1　不是. Hartogs 数不存在到该集的单射（性质 1°），但序型显然有到该良序集的单射. 对良序集，Hartogs 数比序型大.

8.5 练习 1　$\beta\cong b\subset a$ 显然蕴涵 $\beta\leqslant a$. 反之，若 $\beta\leqslant a$ 即 $\beta\in a^+$，则由 β 到 a 的一个单射按 β 的序自然地诱导出 a 的一个子集的良序（参见 §7.3 练习 2），从而 β 同构于 a 的一个良子集.

8.6 练习 1　1° 令 $a=\{x,y\}$. 若 $x\in y$ 且 $y\in x$，则 a 无 $\in_-$ 极小元.

2°　令 $a=\{x,y,z\}$. 若 $x\in y\in z\in x$，则 a 无 $\in_-$ 极小元.

8.6 练习 2 设 $x,y,z\in a$ 满足 $x\in y\in z$. 为证 $x\in z$, 反设 $x\notin z$. 由 a 的 $\in_-$ 三分律知此时有两种可能: $x=z$ 或 $z\in x$. $x=z$ 导致 $x\in y\in x$, 与练习 1(1°)矛盾; $z\in x$ 导致 $z\in x\in y\in z$, 与练习 1(2°)矛盾.

9.1 思考题 1 不用选择公理可以定义 $\mathscr{P}(\mathbf{N})-\{\varnothing\}$ 上的选择函数 f 如下:

$$f(x)=x \text{ 的最小数},\ x\subset \mathbf{N}, x\neq\varnothing.$$

把 $\mathbf{N}$ 换成一般集 a 时, 如果 a 是个良序集或可以使之良序, 那么把上面定义式中的"x 的最小数"换成"x 的最小元", 便得到 $\mathscr{P}(a)-\{\varnothing\}$ 上的选择函数.

9.1 思考题 2 由已知条件及内涵公理知下面便是所求的 a 上的选择函数:

$$f=\{(x,y)\in a\times\bigcup a\mid\varphi(x,y)\}.$$

9.1 练习 1 反设 f 在 a 点不连续, 则有 $\varepsilon>0$ 使对每个 n 可取 x_n(用选择公理)满足 $|x_n-a|<\frac{1}{n}$ 但 $|f(x_n)-f(a)|\geqslant\varepsilon$.

9.2 练习 1 良序原理蕴涵势可比较原理见 §7.4 定理 2 的推论 1 及 §9.2 定理 1. 反过来, 由势可比较原理立即可知 $a\leqslant a^+$ (a^+ 是 a 的 Hartogs 数, a^+ 到 a 不存在单射). 因 a^+ 是序数, 故可用 a 到 a^+ 的单射及 a^+ 中的良序"$\in$"诱导出 a 的良序.

9.2 练习 2 先使无限集 a 成为良序集. 因 $a\not\approx n$, 故由良序基本定理(§7.4 定理 2)知: 或者 $a\cong\omega$, 此时 a 本身是可数集; 或者 ω 与 a 的某个前段同构, 此时该前段就是 a 的可数子集. 易知可数集可与自己的真子集等势.

9.3 练习 1 对由非空集组成的集族 a, 作

$$P=\{g\mid g \text{ 是 } a \text{ 的某个子族的选择函数}\}.$$

"$\subset$"是 P 上偏序. 任取 P 的链 p, 易知 $\bigcup p$ 也是选择函数, 是由 p 中选择函数所包含的有序对的全体组成, 故有 $\mathrm{Dom}(\bigcup p)\subset a$. 这说明 $\bigcup p\in P$. 因 $\bigcup p$ 是 p 的上界, 故可用 Zorn 引理断言 P 有极大元 f. 下证 $\mathrm{Dom}(f)=a$. 反设存在 $x\in a-\mathrm{Dom}(f)$. 因 $x\neq\varnothing$, 故可取 $y\in x$ 使 $f\cup\{(x,y)\}\in P$, 从而与 f 的极大性矛盾. 至此知 f 是 a 的选择函数.

9.3 练习 2 对给定的向量空间, 所有线性无关向量组的集 a 具有性质:

$$x\in a\leftrightarrow x \text{ 的所有有限子集都属于 } a.$$

由 Tukey 引理知 a 必有极大元, 即该向量空间的极大线性无关向量组. 极大性决定了该组是空间的基底.

10.1 练习 1

$$\begin{aligned}\omega\cdot 2&=\bigcup\{\omega+n\mid n\in\omega\}\\&=\{0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots\}.\end{aligned}$$

令 $f(n)=2n+1, f(\omega+n)=2n$，便得双射 $f:\omega\cdot 2\to\omega$；而 $\omega<\omega\cdot 2$，故 $\omega\cdot 2$ 不是基数.

10.1 练习 2 $\omega^2=\bigcup\{\omega\cdot k\mid k\in\omega\}$

$$=\{\omega\cdot m+n\mid m,n\in\omega\}.$$

令 $f(\omega\cdot m+n)=(m,n)$，得双射 $f:\omega^2\to\omega\times\omega$；于是 $\omega^2\approx\omega\times\omega\approx\omega$，故 ω^2 不是基数.

10.1 练习 3 对 α 归纳. 首先，$\omega_0=\omega$ 是基数(命题 2)；若 ω_α 是基数，则 $\omega_{\alpha+1}=\omega_\alpha{}^+$ 也是基数(命题 3)；对极限序数 α，若每个 $\omega_\gamma(\gamma<\alpha)$ 都是基数，则 $\omega_\alpha=\bigcup\{\omega_\gamma\mid\gamma<\alpha\}$ 也是基数(命题 5).

10.1 练习 4 对 β 归纳.

(1) $\beta=0$ 时自然成立.

(2) $\beta=\gamma+1$ 时，$\omega_\beta=\omega_\gamma{}^+>\omega_\gamma$. 设 $\alpha<\beta$. 若 $\alpha=\gamma$，则 $\omega_\beta>\omega_\alpha$；若 $\alpha<\gamma$，则 $\omega_\beta>\omega_\gamma>\omega_\alpha$，最后一步用了归纳假设.

(3) β 为极限序数时，$\omega_\beta=\bigcup\{\omega_\gamma\mid\gamma<\beta\}$. 由 $\alpha<\beta$ 得 $\alpha+1<\beta$，故 $\omega_{\alpha+1}\subset\omega_\beta$，这时有 $\omega_\alpha<\omega_{\alpha+1}\leqslant\omega_\beta$.

10.1 练习 5 若 $\gamma<\alpha$，则 $\gamma\leqslant\omega_\gamma<\omega_\alpha$(用了归纳假设及练习 4). 这说明 $\alpha\subset\omega_\alpha$，即 $\alpha\leqslant\omega_\alpha$.

10.1 练习 6 反设某基数 $\kappa(>\omega)$ 是后继序数：$\kappa=\alpha+1$，则 $\alpha\in\kappa$ 且 $\alpha\approx\kappa$，这与 κ 是基数矛盾. $\alpha\approx\kappa$ 是因为可建立双射 $f:\kappa\to\alpha$ 如下(注意 $\kappa=\alpha+1$)：

$$f(\beta)=\begin{cases}0, & \beta=\alpha,\\ \beta, & \omega\leqslant\beta<\alpha,\\ \beta+1, & \beta<\omega.\end{cases}$$

10.1 练习 7 利用 §10.1 命题 4 的 2°与 3°.

10.1 练习 8 对 n 归纳. 当 $a\subset n+1$ 但 $a\neq n+1$ 时，分以下三种情形讨论：$a=n, a\subset n$ 但 $a\neq n, n\in a$. $n\in a$ 时，有 $a=(a\cap n)\cup\{n\}$，可对 $a\cap n$ 用归纳假设.

10.2 练习 1 对 n 归纳.

1° $n=0$ 时，$m\times\{0\}\cup 0\times\{1\}=m\times\{0\}\approx m=m+0$.

$$\begin{aligned}m\times\{0\}\cup(n+1)\times\{1\}&=(m\times\{0\}\cup n\times\{1\})\cup\{(n,1)\}\\&\approx(m+n)\cup\{(n,1)\}\quad\text{(用了归纳假设)}\\&\approx(m+n)\cup\{m+n\}=m+n+1.\end{aligned}$$

2° $m\times 0=0=m\cdot 0$.

$m\times(n+1)=(m\times n)\cup(m\times\{n\})$

$\approx (m\cdot n)\cup(m\times\{n\})$ （用了归纳假设）

$\approx (m\cdot n)\times\{0\}\cup(m\times\{1\})$

$\approx m\cdot n+m=m(n+1)$.

10.2 练习 2 1° $\kappa\times\{0\}\cup 1\times\{1\}\approx\kappa$.

2° $\kappa\times 1\approx\kappa$.

10.2 练习 3 1° 对任一 $f:\mu\to\kappa$，令

$$h(f)=f\cup\{(\alpha,0)\mid\alpha\in\lambda-\mu\}\in{}^{\lambda}\kappa.$$

上式建立了单射 $h:{}^{\mu}\kappa\to{}^{\lambda}\kappa$.

2° $\lambda=\mu\to\kappa^{\lambda}=\kappa^{\mu}$,

$\lambda<\mu\to\kappa^{\lambda}\leqslant\kappa^{\mu}$（由 1°）.

10.2 练习 4

$a_1\preccurlyeq a_{10}\prec\mathbf{N}\approx\mathbf{Q}\prec a_2\preccurlyeq\mathbf{R}\approx\mathbf{C}\approx\mathbf{R}-\mathbf{Q}\approx a_3\approx a_4\approx a_7\approx a_9\approx a_{12}\prec a_5\approx a_6\approx a_{11}\prec a_8$.

$a_{11}\approx(2^{\omega})^{2^{\omega}}=2^{\omega\cdot 2^{\omega}}=2^{2^{\omega}}$. a_{12}中 f 由它在有理点的函数值完全确定，故 $a_{12}\approx{}^{\mathbf{Q}}\mathbf{R}\approx(2^{\omega})^{\omega}=2^{\omega\cdot\omega}=2^{\omega}$.

参考文献

[1] 鲁又文.数学古今谈.天津:科学技术出版社,1984.15

[2] 伊夫斯.数学史概论.修订本.欧阳绛译.太原:山西经济出版社,1993.110

[3] 吴文俊主编.世界著名数学家传记:上集.北京:科学出版社,1995.7

[4] 马克思.资本论:第一卷.北京:人民出版社,1963.436

[5] 恩格斯.反杜林论.北京:人民出版社,1970.17

[6] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.131

[7] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.100

[8] 中学数学教师编写组.中学数学教师手册.上海:上海教育出版社,1985.1~122

[9] 克莱因.古今数学思想:第 一册.北京大学数学系数学史翻译组译.上海:上海科技出版社,1981.67

[10] 伯恩斯坦.阿尔伯特·爱因斯坦.高耘田等译.北京:科学出版社,1980.16

[11] 王一川,陈开树.影响历史进程的100项科技成就.上海:文匯出版社,1992.14

[12] 克莱因.古今数学思想:第四册.北京大学数学系数学史翻译组译.上海:上海科技出版社.1981.41

[13] 鲁又文.数学古今谈.天津:天津科学技术出版社,1984.190

[14] 克莱因.数学:确定性的丧史.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.136

[15] 克莱因.数学:确定性的丧史.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.143~144

[16] 克莱因.数学:确定性的丧史.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997. 143

[17] 克莱因.数学:确定性的丧史.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997. 175

[18] 克莱因.数学:确定性的丧史.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.147~149

[19] 李文林主编.数学珍宝.北京:科学出版社,1998.35

[20] 克莱因.古今数学思想:第四册.上海:上海科学技术出版社,1981.45

[21] 克莱因.古今数学思想:第四册.上海:上海科学技术出版社,1981.51

[22] 王浩.哥德尔.上海:上海译文出版社,1997.276

[23] 《逻辑学辞典》编辑委员会.逻辑学辞典.吉林:吉林人民出版社,1983.205

[24] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.16~17

[25] 波耶.微积分概念史.上海师范大学数学系翻译组.上海:上海人民出版社,1977.45

[26] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.192

[27] 亚历山大洛史等.数学——它的内容、方法和意义:第三卷.王元等译.北京:科学出版社,1962.181

[28] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.81~82

[29] 伊夫斯.数学史概论,修订本.欧阳绛译.太原:山西经济出版社,1993.363

[30] 陈省身,陈维桓.微分几何讲义.北京:北京大学出版社,1983.(代序)2
[31] 伊夫斯.数学史概论,修订本.欧阳绛译.太原:山西经济出版社,1993.208
[32] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.270
[33] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.278
[34] 解恩泽,徐本顺主编.世界数学家思想方法.济南:山东教育出版社,1993.952
[35] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.274
[36] 伊夫斯.数学史概论,修订本.欧阳绛译.太原:山西经济出版社,1993.408
[37] 克莱因.古今数学思想:第四册.上海:上海科学技术出版社,1981.60
[38] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.203
[39] 解恩泽,徐本顺主编.世界数学家思想方法.济南:山东教育出版社,1993.965
[40] 丹齐克.数,科学的语言.苏仲湘译.北京:商务印书馆.1985.177
[41] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.278
[42] 李文林主编.数学珍宝.北京:科学出版社,1998.699
[43] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.279
[44] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.203
[45] 张锦文,阎金童主编.集合论发展史.桂林:广西师范大学出版社,1993.3
[46] 谢邦杰.超穷数与超穷论法.长春:吉林人民出版社,1979.1
[47] 李文林主编.数学珍宝.北京:科学出版社,1998.699~700
[48] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.180,193
[49] Hrbacek K, Jech T. Introduction to Set Theory. Second Edition, Revised and Expanded. New York and Basel: Marcel Dekker, INC. 1984.1
[50] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.303~304,298
[51] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.139
[52] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.144,143,142
[53] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.217
[54] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.84
[55] 张锦文,阎金童主编.集合论发展史.桂林:广西师范大学出版社,1993.174
[56] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.96,95,105
[57] 克莱因.数学:确定性的丧失.李宏魁译.长沙:湖南科学技术出版社,1997.254
[58] 王浩.哥德尔.上海:上海译文出版社,1997.80~83,386,389
[59] 汪芳庭.数理逻辑.合肥:中国科学技术大学出版社,1990.218~221
[60] 王浩,哥德尔.上海:上海译文出版社,1997.279~280
[62] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.114~115
[63] 邓东皋,孙小礼,张祖贵编.数学与文化.北京:北京大学出版社,1999.271
[64] 夏基松,郑毓信.西方数学哲学.北京:人民出版社,1986.200
[65] 王浩.哥德尔.上海:上海译文出版社,1997.6,237
[66] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.294

[67] 汪芳庭.数理逻辑.合肥:中国科学技术大学出版社,1990.32～36
[68] 汪芳庭.数理逻辑.合肥:中国科学技术大学出版社,1990.218～221,248～249
[69] Eves H. Great Moments of Mathematics.
[70] Hrbacek K, Jech T. Introduction to Set Theory. Second Edition, Revised and Expanded. New York and Basel: Marcel Dekker, INC. 1984. 50
[71] 李浙生.数学科学与辩证法.北京:首都师范大学出版社,1995.172～174
[72] Kapur J.N.数学家谈数学本质.王庆人译.北京:北京大学出版社,1989.209
[73] 王世强.模型论基础.北京:科学出版社,1987.序言 ii
[74] 汪芳庭.模型论对实数理论的应用.曲阜师范大学学报.1997,Vol.23, No.2.57～60
[75] Wang Fangting. On Arithmetic Models of an Uncountable Language. 南京大学学报数学半年刊. Sept. 1998, Vol.15 Supp. 135～139
[76] Goodstein R L. Recursive Number Theory. North-Holland Publ Co. 1957
[77] 王宪钧.数理逻辑引论.北京:北京大学出版社.1982.273
[78] 张锦文,闾金童主编.集合论发展史.桂林:广西师范大学出版社,1993.58
[79] 邓东皋,孙小礼,张祖贵编.数学与文化.北京:北京大学出版社,1999.228
[80] 张锦文,闾金童主编.集合论发展史.桂林:广西师范大学出版社,1993.78
[81] 邓东皋,孙小礼,张祖贵编.数学与文化.北京:北京大学出版社,1999.229
[82] Just W, Weese M. Discovering Modern Set Theory. I. American Mathematical Society. 1996. 143～144
[83] Just W, Weese M. Discovering Modern Set Theory. I. American Mathematical Society. 1996. 146
[84] 辞海编辑委员会.辞海.上海辞书出版社,1979.538
[85] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室.现代汉语词典.北京:商务印书馆,1981.512
[86] 王世强,杨守廉.独立于 ZFC 的数学问题.北京:北京师范大学出版社,1992.137～138
[87] Wang Fangting. On a Special Kind of Points in Stone-Cech Compactification $\beta\omega$. Journal of China University of Science and Technology, Vol.28, No.5, Oct. 1998. 567～570
[88] Kapur J N.数学家谈数学本质.王庆人译.北京:北京大学出版社,1989.328
[89] Kunen K. Set Theory. North-Holland. 1980. 98
[90] 邓东皋,孙小礼,张祖贵编.数学与文化.北京:北京大学出版社,1999.271
[91] Jech T. Set Theory. Academic Press. 1978
[92] 张锦文.公理集合论导引.北京:科学出版社,1991
[93] 汪芳庭.公理集论.合肥:中国科学技术出版社,1995
[94] 张宏裕.公理化集合论.天津:天津科学技术出版社,2000
[95] 王世强,杨守廉.独立于 ZFC 的数学问题.北京:北京师范大学出版社,1992.序言 2
[96] Just W, Weese M. Discovering Modern Set Theory. I. American Mathematical Society.

1996. 197

[97] Wang Fangting. On a Special Kind of Points in Stone-Cech Compactification $\beta\omega$. Journal of China University of Science and Technology, Vol. 28, No. 5, Oct. 1998. 567～570

[98] 王世强,孟晓青.数理逻辑与范畴论应用.北京:北京师范大学出版社,1999. 333～360